

常微分算子谱论

刘景麟 著



科学出版社

www.sciencep.com

(O-3347.0101)

销售分类建议：高等数学

ISBN 978-7-03-023157-4



9 787030 231574 >

定价：68.00 元

常微分算子谱论

刘景麟 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书论述了由线性常微分算式在空间 L^2 上所生成的线性算子的谱理论, 及其亏指数及判定、自伴延拓、谱染特点、谱分解等. 有限区间情形给出 Liouville、Sturm 和泛函分析三种处理. 无限区间情形, 详细讨论了二阶 Sturm-Liouville 算子经典的 Weyl 理论、极限点、圆的判别、自伴延拓的谱分解与 Titchmarsh 按特征函数的展开.

本书可供高等院校数学系本科生、研究生、教师及科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

常微分算子谱论/刘景麟著. —北京: 科学出版社, 2009

ISBN 978-7-03-023157-4

I. 常… II. 刘… III. 微分算子 IV. O175.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 155679 号

责任编辑: 张 扬 房 阳 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

西源印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 1 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2009 年 1 月第一次印刷 印张: 24 3/4

印数: 1—3 000 字数: 487 000

定价: 68.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈明辉〉)

前 言

常微分算子谱理论的研究,可以上溯到 19 世纪 30 年代 Sturm 和 Liouville 的工作,已经有近 200 年历史了. 由于线性叠加思想的广泛应用,让它跟数学的众多分支(微分方程、概率论、复变函数、特殊函数等)都有了联系,且成为了量子物理的基本数学工具. 它与物理的互动,又催生了广义函数、局部凸拓扑线性空间、装备 Hilbert 空间(即 Gelfand triplet)等新的数学分支. 所以,这个方向虽然古老,但却是一个极富生命力的领域.

本书是在给内蒙古大学 1984 级研究生讲课的基础上整理形成的一本讲义,曾在南京理工大学作为课程教材用过,培养了若干届研究生. 我们希望它能将此课题在 20 世纪几个研究高潮里侧重于按特征展开所得到的主要结果反映出来:

- (1) 早期 Weyl 的点圆分类工作;
- (2) 四、五十年代 Titchmarsh, Levinson, Levitan 等英美国家和前苏联人的工作;
- (3) 七、八十年代西方与我们自己(内蒙古大学讨论班)关于亏指数和自伴延拓的工作.

至于谱集和按广义特征泛函展开的研究则放弃了,它们都是当今正在进行着的工作,更适宜于过一阶段再小结.

2001 年夏,南京理工大学数学系 1997 级何凌冰、吴海勇、徐冬元、王继贵、刘敬刚、袁非凡等同学冒着炎热,非常费事地将本书部分书稿用 word 打印出来,后来,许孟博士提供了将 word 文件转化为 Latex 文件的软件,黄振友博士将源程序改成了现在的 Latex 形式,他的几届研究生何凌冰、金国海、杨传富、陈卫民、王平心、陈建华、王兰宁、张艳霞、向会立、王一操、张茂柱、冯明勇、吴春莲、李丽、施德才等阅读书稿提出了不少修改意见,特别是,张茂柱又打印了亏指数理论部分,李丽、施德才打印了例子部分并在 Latex 下将全书的图作出,许孟博士帮助修改了部分稿件,在此,对这些老师和同学的辛勤劳动表示衷心感谢!

刘景麟

2007 年夏于南京

目 录

前言

第 1 章	常微分算式所定义的分算子	1
1.1	基本概念与性质	1
1.2	微分算子的亏指数	25
1.3	对称微分算子的亏指数与自伴延拓	38
第 2 章	常型自伴微分算子的谱论	49
2.1	特征值与特征函数的渐近式	50
2.2	特征函数的零点	66
2.3	按特征函数的展开	77
2.4	常型自伴微分算子的谱分解	93
第 3 章	奇型 Sturm-Liouville 算子的谱论	110
3.1	Weyl 圆套	110
3.2	Weyl 极限点与极限圆	116
3.3	Weyl 点, 圆的判别	121
3.4	Weyl 函数	146
3.5	Weyl 解	156
3.6	$T_0(M)$ 的自伴延拓	160
3.7	谱函数的存在性	169
3.8	极限点情形的特征展开	183
3.9	极限点情形的谱与谱分解	198
3.10	极限圆情形的谱与谱分解	208
3.11	两端均为奇异的情形	215
第 4 章	例子	238
4.1	微分算式 $-iD$ 与 $L^2(\mathbf{R})$ 上的 Fourier 变换	238
4.2	微分算式 $-D^2$ 与 Fourier 展开	243
4.3	Legendre 微分算式	251
4.4	Bessel 微分算式	256
4.5	Hermite 微分算式	280
4.6	Laguerre 微分算式	286

第 5 章 奇型任意阶情形自伴微分算子的谱论	291
5.1 展开式定理与 Parseval 等式	291
5.2 逆变换定理, 谱矩阵的唯一性	301
5.3 Green 函数与谱矩阵的表示	317
5.4 一类高阶对称微分算式极限点的 Kauffman 方法	333
附录 对称算子的自伴延拓的 Calkin 描述	367
参考文献	386

第1章 常微分算式所定义的分算子

1.1 基本概念与性质

定义 1.1.1 设 I 是 \mathbf{R} 上的区间, 记 $D = \frac{d}{dx}$, 设 $a_k \in C^k(I), k = 0, 1, \dots, n$, 称

$$M = \sum_{k=0}^n a_k(x) D^k = a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \dots + a_1(x) D + a_0(x)$$

为区间 I 上的微分算式, 如果

$$a_n(x) \neq 0, \quad x \in I,$$

则称 M 是正则的, 否则称 M 是非正则的.

定理 1.1.1(存在唯一定理) 设

- (1) M 为区间 I 上的正则微分算式;
- (2) g 是复值可测函数, $g \in L_{\text{loc}}(I)$,

$$x_0 \in I, \quad \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n,$$

则存在唯一的 $y \in A^n(I) = \{f | f \in C^{n-1}(I), D^{n-1}f \in AC_{\text{loc}}(I)\}$, 使得

$$\begin{cases} My = g, \\ \begin{pmatrix} y \\ Dy \\ \vdots \\ D^{n-1}y \end{pmatrix}(x_0) = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

证明 (1) 设 I 是闭区间, 把微分方程化为微分方程组, 令

$$y_0 = y, \quad y_1 = Dy, \quad \dots, \quad y_{n-1} = D^{n-1}y,$$

则方程变成

$$\begin{cases} Dy_0 = y_1, \\ Dy_1 = y_2, \\ \dots\dots\dots \\ Dy_{n-2} = y_{n-1}, \\ Dy_{n-1} = \frac{1}{a_n(x)} \left(g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y_k \right), \end{cases} \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} (x_0) = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

显然方程的 Cauchy 问题解存在唯一与方程组的 Cauchy 问题解存在唯一是等价的. 将后者写成矩阵形式

$$DY + A(x)Y = G(x), \quad Y(x_0) = C,$$

其中,

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_0(x) \\ y_1(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{a_0(x)}{a_n(x)} & \frac{a_1(x)}{a_n(x)} & \frac{a_2(x)}{a_n(x)} & \dots & \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix},$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{g(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}, \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_0(x_0) \\ y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x_0) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix},$$

而矩阵形式的微分方程组 Cauchy 问题又与积分方程

$$Y(x) + \int_{x_0}^x A(t)Y(t)dt = C + \int_{x_0}^x G(t)dt = H(x)$$

等价. 在空间 $\prod_n L^1(I) = \overbrace{L^1(I) \times \dots \times L^1(I)}^n$ 上引进算子 Φ

$$(\Phi Y)(x) = \int_{x_0}^x A(t)Y(t)dt,$$

则积分方程可表成

$$(I + \Phi)Y = H,$$

我们来证明 $(I + \Phi)^{-1}$ 存在, 因而

$$Y = (I + \Phi)^{-1}H.$$

为此要估计 Φ^m 的范数. 设向量 $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ 的范数为 $\|v\| = \sum_{j=1}^n |v_j|$, 矩阵 $A =$

(a_{jk}) 的范数为 $\|A\| = \sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|$, 则 $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|$. 设 $Y \in \prod_n L^1(I)$ 的范数为

$$\|Y\| = \int_I \|Y(x)\| dx,$$

于是

$$\|\Phi Y(x)\| = \left\| \int_{x_0}^x A(t)Y(t)dt \right\| \leq \left| \int_{x_0}^x \|A(t)Y(t)\| dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x \|A(t)\| \|Y(t)\| dt \right| \leq K \|Y\|,$$

(其中, $K = \max_{x \in I} \|A(x)\|$)

$$\|\Phi Y\| = \int_I \|\Phi Y(x)\| dx \leq K \mu(I) \|Y\|,$$

$$\|\Phi^2 Y(x)\| = \left\| \int_{x_0}^x A(t) \Phi Y(t) dt \right\| \leq \left| \int_{x_0}^x \|A(t)\| \|\Phi Y(t)\| dt \right| \leq K^2 \|Y\| |x - x_0|,$$

$$\|\Phi^2 Y\| = \int_I \|\Phi^2 Y(x)\| dx \leq K^2 \alpha \mu(I) \|Y\|, \quad \alpha = \max_{x \in I} |x - x_0|,$$

$$\|\Phi^3 Y(x)\| = \left\| \int_{x_0}^x A(t) \Phi^2 Y(t) dt \right\| \leq \left| \int_{x_0}^x \|A(t)\| \|\Phi^2 Y(t)\| dt \right| \leq \frac{K^3 \|Y\|}{2} |x - x_0|^2,$$

$$\|\Phi^3 Y\| = \int_I \|\Phi^3 Y(x)\| dx \leq \frac{K^3 \alpha^2 \mu(I)}{2} \|Y\|.$$

一般地, 用归纳法可得

$$\|\Phi^m Y(x)\| \leq \frac{K^m \|Y\|}{(m-1)!} |x - x_0|^{m-1},$$

$$\|\Phi^m Y\| \leq \frac{K^m \alpha^{m-1} \mu(I)}{(m-1)!} \|Y\|.$$

于是

$$\|\Phi^m\| \leq K \mu(I) \frac{(K \alpha)^{m-1}}{(m-1)!}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

所以

$$(I + \Phi)^{-1} = I - \Phi + \Phi^2 - \Phi^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \Phi^m$$

存在, 积分方程的解存在且唯一. 因为 $H(x), \int_{x_0}^x A(t)Y(t)dt$ 绝对连续, 故 $Y(x)$ 绝对连续.

(2) I 不是闭区间.

对任何 I 的闭子区间 $J, x_0 \in J$, 存在唯一的 $y_J \in A^n(J)$, 使得

$$\begin{cases} My_J = g, \\ D^k y_J(x_0) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

由唯一性知

$$y_{J_1}(x) = y_{J_2}(x), \quad x \in J_1 \cap J_2$$

所以, 令

$$y(x) = y_J(x), \quad x \in J.$$

便可以在 I 上定义一个单值的 $y \in A^n(I)$, 使得

$$\begin{cases} My = g, & x \in I, \\ D^k y(x_0) = c_k, & k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

由子区间上的唯一性知 y 唯一.

推论 1.1.1 如果 $a_k \in C^\infty(I), k = 0, 1, \dots, n$, 而 $g \in C^l(I)$, 则解 $y \in C^{n+l}(I)$.

证明

$$D^n y = \frac{1}{a_n(x)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-a_k(x) D^k y(x)) + g(x) \right).$$

因为 $y \in A^n(I)$, 所以右边属于 $C(I)$. 于是 $y \in C^n(I)$. 这样右边又属于 $C^1(I)$, 于是 $y \in C^{n+1}(I)$. 如此下去可得 $y \in C^{n+l}(I)$.

假设 $I = [a, b]$, 而 $f, g \in C^n(I)$, 考虑积分

$$(Mf, g) = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n a_k(x) D^k f(x) \overline{g(x)} \right) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b a_k(x) D^k f(x) \overline{g(x)} dx,$$

如果 $k > 0$, 利用分部积分

$$\begin{aligned} \int_a^b a_k(x) D^k f(x) \overline{g(x)} dx &= D^{k-1} f(x) a_k(x) \overline{g(x)} \Big|_a^b - \int_a^b D^{k-1} f(x) D(a_k(x) \overline{g(x)}) dx \\ &= [D^{k-1} f(x) a_k(x) \overline{g(x)} - D^{k-2} f(x) D(a_k(x) \overline{g(x)})] \Big|_a^b \\ &\quad + (-1)^2 \int_a^b D^{k-2} f(x) D^2(a_k(x) \overline{g(x)}) dx \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} D^{k-j} f(x) D^{j-1}(a_k(x) \overline{g(x)}) \Big|_a^b \\ &\quad + (-1)^k \int_a^b f(x) D^k(a_k(x) \overline{g(x)}) dx. \end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned}(Mf, g) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} D^{k-j} f(x) D^{j-1} (a_k(x) \overline{g(x)}) \Big|_a^b \\ &\quad + \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_a^b f(x) D^k (a_k(x) \overline{g(x)}) dx.\end{aligned}$$

定义 1.1.2 设 $M = \sum_{k=0}^n a_k(x) D^k$ 是 I 上的微分算式, 称

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k D^k \overline{a_k(x)}$$

为 M 的共轭微分算式, 记为 M^+ .

M^+ 的首项系数是

$$(-1)^n \overline{a_n(x)},$$

所以当 M 正则时, 它也是 I 上的正则微分算式.

定义 1.1.3 称 $[f, g](x) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} D^{k-j} f(x) \cdot D^{j-1} (a_k(x) \overline{g(x)})$ 为 M

的 Lagrange 双线性型.

显然

$$[\alpha f_1 + \beta f_2, g] = \alpha [f_1, g] + \beta [f_2, g],$$

$$[f, \alpha g_1 + \beta g_2] = \bar{\alpha} [f, g_1] + \bar{\beta} [f, g_2].$$

引理 1.1.1 (Green 公式) 设 M 是 I 上的微分算式, 记

$$H_M^n(I) = \{f \in A^n(I) \mid f, Mf \in L^2(I)\},$$

则对任意的 $f, g \in H_M^n(I)$, 有

$$(Mf, g) = (f, M^+g) + [f, g] \Big|_a^b.$$

下面具体地考察一下 Lagrange 双线性型. 由 Leibnitz 公式

$$D^{j-1} (a_k(x) \overline{g(x)}) = \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j-1}{l} D^{j-1-l} a_k(x) D^l \overline{g(x)},$$

所以

$$[f, g](x) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^{j-1} \binom{j-1}{l} D^{k-j} f(x) D^{j-1-l} a_k(x) D^l \overline{g(x)}.$$

于是 $1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq n, 0 \leq l \leq n-1$, 而求和的范围就是图 1.1 里的那个黑立体, 故

$$\text{上式} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=l+1}^n \sum_{k=j}^n (-1)^{j-1} \binom{j-1}{l} D^{j-1-l} a_k(x) D^{k-j} f(x) D^l \overline{g(x)}.$$

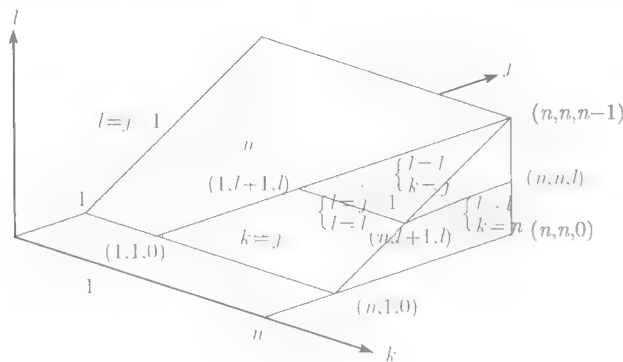


图 1.1

令 $k = j + k'$, 则得

$$\text{上式} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=l+1}^n \sum_{k'=0}^{n-j} (-1)^{j-1} \binom{j-1}{l} D^{j-1-l} a_{j+k'}(x) D^{k'} f(x) D^l \overline{g(x)},$$

令 $j-1 = j'$,

$$\text{上式} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j'=l}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n-j'-1} (-1)^{j'} \binom{j'}{l} D^{j'-l} a_{j'+k'+1}(x) D^{k'} f(x) D^l \overline{g(x)}.$$

后面两个和号是在图 1.2 的三角形里求和, 故

$$\text{上式} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n-l-1} \sum_{j'=l}^{n-k'-1} (-1)^{j'} \binom{j'}{l} D^{j'-l} a_{j'+k'+1}(x) D^{k'} f(x) D^l \overline{g(x)},$$

整理一下, 最后得

$$\begin{aligned} [f, g](x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-j-1} \sum_{l=j}^{n-k-1} (-1)^l \binom{l}{j} D^{l-j} a_{k+l+1}(x) D^k f(x) D^j \overline{g(x)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} F_{jk} D^k f(x) D^j \overline{g(x)} = \begin{pmatrix} F(x) \begin{pmatrix} f(x) \\ Df(x) \\ \vdots \\ D^{n-1}f(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g(x) \\ Dg(x) \\ \vdots \\ D^{n-1}g(x) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

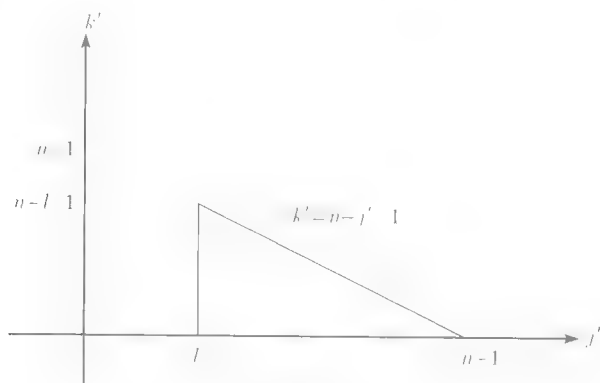


图 1.2

这里

$$F_{jk}(x) = \begin{cases} \sum_{l=j}^{n-k-1} (-1)^l \binom{l}{j} D^{l-j} a_{k+l+1}(x), & 0 \leq k \leq n-j-1 \ (0 \leq k+j \leq n-1), \\ 0, & n-j-1 < k \leq n-1 \ (n-1 < k+j). \end{cases}$$

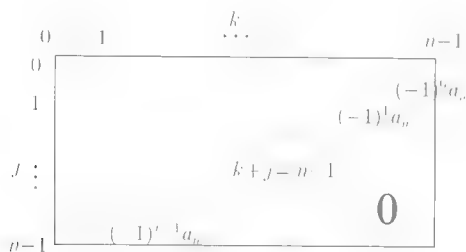


图 1.3

当 $k+j=n-1$ 时, $n-k-1=j$,

$$F_{jk}(x) = (-1)^j \binom{j}{j} a_{k+j+1}(x) = (-1)^j a_n.$$

引理 1.1.2 称 $F = (F_{jk}(x))$ 为 Lagrange 双线性型 $[\cdot, \cdot]$ 的矩阵, 当 M 为正则微分算式时, 这个矩阵是非退化的.

证明 $\det(F_{jk}(x)) = a_n^n(x) \neq 0$.

引理 1.1.3 设 L, M 是 I 上的微分算式, 则

(1) $(L+M)^+ = L^+ + M^+;$

(2) $L^{++} = L;$

$$(3) (ML)^+ = L^+ M^+.$$

证明 设

$$L = \sum_{k=0}^n p_k D^k, \quad M = \sum_{k=0}^m q_k D^k, \quad n \geq m.$$

(1)

$$\begin{aligned} (L + M)^+ &= \left(\sum_{k=0}^m (p_k + q_k) D^k + \sum_{k=m+1}^n p_k D^k \right)^+ \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k D^k \overline{(p_k + q_k)} + \sum_{k=m+1}^n (-1)^k D^k \overline{p_k} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k D^k \overline{p_k} + \sum_{k=0}^m (-1)^k D^k \overline{q_k} = L^+ + M^+. \end{aligned}$$

(2) 记 $L_k = p_k D^k$, 则 $L = \sum_{k=0}^n L_k$. 于是

$$L^+ = \sum_{k=0}^n L_k^+, \quad L^{++} = \sum_{k=0}^n L_k^{++}.$$

只需证明 $L_k^{++} = L_k$ 即可.

$$\begin{aligned} (pD^k)^+ &= (-1)^k D^k \overline{p} = (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (D^{k-j} \overline{p}) D^j, \\ (pD^k)^{++} &= (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j D^j \overline{D^{k-j} \overline{p}} \\ &= (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} (D^{k-j-m} p) D^m \\ &= (-1)^k \sum_{j=0}^k \sum_{m=0}^j (-1)^j \binom{k}{j} \binom{j}{m} (D^{k-j-m} p) D^m \\ &= (-1)^k \sum_{m=0}^k \left(\sum_{j=m}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{j}{m} \right) (D^{k-j-m} p) D^m. \end{aligned}$$

考虑

$$\sum_{j=m}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{j}{m} \underline{j=m+j'} \sum_{j'=0}^{k-m} (-1)^{m+j'} \binom{k}{m+j'} \binom{m+j'}{m},$$

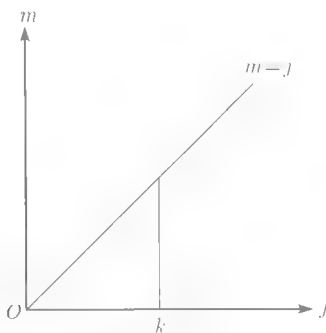


图 1.4

因为

$$\begin{aligned} \binom{k}{m+j'} \binom{m+j'}{m} &= \frac{k!}{(m+j')! (k-m-j')!} \frac{(m+j')!}{m! j'!} = \frac{k!}{m! (k-m)!} \frac{(k-m)!}{(k-m-j')! j'!} \\ &= \binom{k}{m} \binom{k-m}{j'}, \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{j=-m}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{j}{m} = (-1)^m \binom{k}{m} \sum_{j'=0}^{k-m} (-1)^{j'} \binom{k-m}{j'}.$$

而

$$0 - (1-1)^{k-m} = \sum_{j'=0}^{k-m} \binom{k-m}{j'} 1^{k-m-j'} (-1)^{j'} = \sum_{j'=0}^{k-m} (-1)^{j'} \binom{k-m}{j'}, \quad m \neq k,$$

故得

$$(pD^k)^{++} = (-1)^k (-1)^k \binom{k}{k} \binom{k}{k} pD^k = pD^k.$$

(3) 记 $L_k = p_k D^k$, $M_j = q_j D^j$, 则

$$\begin{aligned} ML &= \left(\sum_{j=0}^m M_j \right) \left(\sum_{k=0}^n L_k \right) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n M_j L_k, \\ (ML)^+ &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n (M_j L_k)^+, \end{aligned}$$

只需证明 $(M_j L_k)^+ = L_k^+ M_j^+$ 即可. 设 $L = pD^k$, $M = qD^l$, 则

$$\begin{aligned}
 ML &= qD^l p D^k = q \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} p^{(l-j)} D^{k+j}, \\
 (ML)^+ &= \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} (-1)^{k+j} D^{k+j} \overline{p^{(l-j)} q} \\
 &= (-1)^k \sum_{j=0}^l (-1)^j \binom{l}{j} D^k \left(D^j \overline{(D^{l-j} p) q} \right) \\
 &= (-1)^k \sum_{j=0}^l (-1)^j \binom{l}{j} D^k \left(\sum_{s=0}^j \binom{j}{s} (D^{l-s} \overline{p}) D^s \overline{q} \right) \\
 &= (-1)^k \sum_{j=0}^l (-1)^j \binom{l}{j} \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} (D^{l+k-s-t} \overline{p}) D^{s+t} \overline{q} \\
 &= (-1)^k \sum_{s=0}^l \left(\sum_{j=s}^l (-1)^j \binom{l}{j} \binom{j}{s} \right) \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} (D^{l+k-s-t} \overline{p}) D^{s+t} \overline{q}.
 \end{aligned}$$

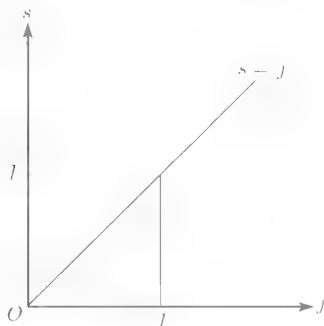


图 1.5

与 (2) 同, 有

$$\sum_{j=s}^l (-1)^j \binom{l}{j} \binom{j}{s} = 0, \quad s \neq l,$$

故得

$$\begin{aligned}
 (ML)^+ &= (-1)^k (-1)^l \binom{l}{l} \binom{l}{l} \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} (D^{k-t} \overline{p}) D^{l+t} \overline{q} \\
 &\quad - (-1)^{k+l} \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} (D^{k-t} \overline{p}) D^{l+t} \overline{q}.
 \end{aligned}$$

另一方面又有

$$\begin{aligned}
 L^+ M^+ &= ((-1)^k D^k \bar{p}) ((-1)^l D^l \bar{q}) = (-1)^{k+l} D^k \bar{p} D^l \bar{q} \\
 &= (-1)^{k+l} \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} (D^{k-t} \bar{p}) D^{l+t} \bar{q},
 \end{aligned}$$

所以 $(ML)^+ = L^+ M^+$.

定义 1.1.4 微分算式 M 称为是对称的, 如果 $M^+ = M$.

下面来推导对称微分算式的一般形状. 由于

$$\begin{aligned}
 p D^{2k} &= D^k p D^k + \cdots, \\
 p D^{2k+1} &= D^k (p D) D^k + \cdots = D^k (D p) D^k + \cdots \\
 &= \frac{1}{2} D^k (p D + D p) D^k + \cdots,
 \end{aligned}$$

所以微分算式 M 总可以表成 $D^k p D^k$ 和 $\frac{1}{2} D^k (p D + D p) D^k, k = 0, 1, 2, \cdots$ 的线性组合.

例如,

$$\begin{aligned}
 M &= p_2 D^2 + p_1 D + p_0 \\
 &= -D(-p_2)D - p'_2 D + p_1 D + p_0 \\
 &= -D(-p_2)D + (p_1 - p'_2)D + p_0 \\
 &= -D(-p_2)D + \left(\frac{p_1 - p'_2}{2} D + D \frac{p_1 - p'_2}{2} \right) + p_0 - \frac{p'_1 - p''_2}{2} \\
 &= -D q_2 D + (q_1 D + D q_1) + q_0.
 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
 (D^k p D^k)^+ &= (D^k)^+ p^+ (D^k)^+ = (-1)^k D^k \bar{p} (-1)^k D^k = D^k \bar{p} D^k, \\
 \left(\frac{1}{2} D^k (p D + D p) D^k \right)^+ &= \frac{1}{2} (D^k)^+ (p D + D p)^+ (D^k)^+ = -\frac{1}{2} D^k (\bar{p} D + D \bar{p}) D^k,
 \end{aligned}$$

所以, 当 p 是实函数时,

$$(-1)^k D^k p D^k, \quad \frac{i}{2} D^k (p D + D p) D^k$$

都是对称微分算式. 假设 M 是 n 阶的对称微分算式, 首项系数为 a_n , 则 M^+ 的首项系数是 $(-1)^n \bar{a}_n$, 这时

$$(-1)^n \bar{a}_n = a_n,$$

所以 n 为偶数时, a_n 是实函数; n 为奇数时, $a_n + \bar{a}_n = 0$, a_n 是纯虚函数, 即 $a_n = i \tilde{a}_n$, \tilde{a}_n 是某实函数. 由于

n 为偶数时, $(-1)^{\frac{n}{2}} D^{\frac{n}{2}} a_n D^{\frac{n}{2}}$ 是对称的;

n 为奇数时, $\frac{i}{2}D^{\frac{n-1}{2}}(\tilde{a}_n D + D\tilde{a}_n)D^{\frac{n-1}{2}}$ 是对称的,

于是, $M - D^{\frac{n}{2}}a_n D^{\frac{n}{2}}$ 或 $M - \frac{i}{2}D^{\frac{n-1}{2}}(\tilde{a}_n D + D\tilde{a}_n)D^{\frac{n-1}{2}}$ 是 $n-1$ 阶对称的微分算式. 这样逐步将阶数下降, 最后便得出

定理 1.1.2 任何 n 阶对称的微分算式, 都具有下述形状:

$$M = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k D^k a_k(x) D^k + i \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} D^k (b_k(x) D + D b_k(x)) D^k,$$

其中, a_k 和 b_k 都是实函数.

推论 1.1.2 实对称的微分算式是偶阶的, 其形状为

$$M = \sum_{k=0}^n (-1)^k D^k a_k(x) D^k,$$

其中, a_k 是实函数.

特别地, 二阶对称微分算式是

$$-DpD + q,$$

其中, p 和 q 都是实函数, 通常称这个微分算式为 Sturm-Liouville 算式. iD 则是一阶对称微分算式.

下面考察几个简单对称微分算式的 Lagrange 双线性形式:

(1) 一阶对称微分算式 iD ,

$$[f, g]|_a^b = (iDf, g) - (f, iDg) = (if', g) - (f, ig') = if\bar{g}|_a^b,$$

所以

$$[f, g](x) = if(x)\overline{g(x)}, \quad F(x) = (i).$$

(2) Sturm-Liouville 微分算式 $-DpD + q$, p, q 为实函数,

$$\begin{aligned} [f, g]|_a^b &= (-DpDf + qf, g) - (f, -DpDg + qg) \\ &= -pf'\bar{g}|_a^b + \int_a^b pf'\bar{g}'dx - (f, -DpDg) \\ &= -pf'\bar{g}|_a^b + pf\bar{g}'|_a^b = p(f\bar{g}' - f'\bar{g})|_a^b, \end{aligned}$$

所以

$$[f, g](x) = p(x) \left(f(x)\overline{g'(x)} - f'(x)\overline{g(x)} \right) = p(x)W(f, \bar{g})(x).$$

因为 $a_2(x) = -p(x)$, $a_1(x) = -p'(x)$, $a_0(x) = q(x)$, 而

$$F_{jk}(x) = \sum_{l=j}^{n-k-1} (-1)^l \binom{l}{j} D^{l-j} a_{k+l+1}(x), \quad 0 \leq k+j \leq n-1,$$

所以

$$F_{00}(x) = \sum_{l=0}^1 (-1)^l \binom{l}{0} D^l a_{l+1}(x) = a_1(x) - Da_2(x) = -p'(x) + p'(x) = 0.$$

于是

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -p(x) \\ p(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$[f, g](x) = \left(\mathbf{F}(x) \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} \right).$$

(3) Titchmarsh 微分算式 $-D^2 + q$, q 为实函数,

$$[f, g](x) = W(f, \bar{g})(x),$$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

引理 1.1.4 设 $a < b$, 则存在 $h \in C^\infty(\mathbf{R})$, 使得

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a, \\ 0, & x \geq b. \end{cases}$$

证明

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \in C^\infty(\mathbf{R}),$$

取 $\delta < b - a$, 令

$$\tilde{h}(x) = \frac{\rho((x-a)^2 - \delta^2)}{\rho((x-a)^2 - \delta^2) + \rho\left(\frac{\delta^2}{4} - (x-a)^2\right)}.$$

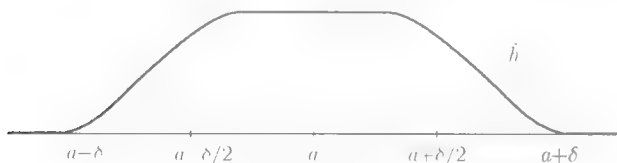


图 1.6

则由于分母从不为零, $\tilde{h} \in C^\infty(\mathbf{R})$ 且

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} 1, & |x - a| \leq \frac{\delta}{2}, \\ 0, & |x - a| \geq \delta. \end{cases}$$

修改 \tilde{h} 使得当 $x < a - \frac{\delta}{2}$ 时, 函数值取 1, 则得到所要的 h .

定理 1.1.3 若 M 是区间 I 上的对称正则微分算式, 则

(1) $[f, g](x) = -\overline{[g, f](x)}$, $x \in I$;

(2) $F^*(x) = -F(x)$, $(F^{-1})^*(x) = -F^{-1}(x)$.

证明 (1) 当 $x, x' \in I, x < x'$ 时, 由 Green 公式,

$$\int_x^{x'} Mf(t)\overline{g(t)}dt - \int_x^{x'} f(t)\overline{Mg(t)}dt = [f, g]_x^{x'}.$$

取 $h \in C^\infty(\mathbf{R})$ 如图 1.7 所示:

$$\begin{aligned} [f, g](x) &= -[f, hg]_x^{x'} = -\int_x^{x'} \left(Mf(t)\overline{h(t)g(t)} - f(t)\overline{Mh(t)g(t)} \right) dt \\ &= \int_x^{x'} \left(\overline{Mh(t)g(t)f(t)} - \overline{h(t)g(t)Mf(t)} \right) dt \\ &= \overline{[hg, f]_x^{x'}} = -\overline{[g, f](x)}. \end{aligned}$$

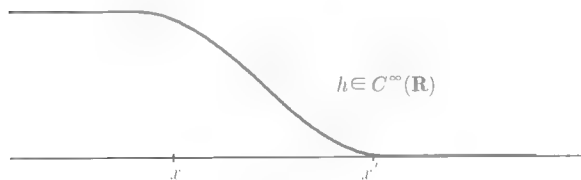


图 1.7

(2)

$$[f, g](x) = (F(x)\sigma f(x), \sigma g(x)) = (\sigma f(x), F(x)^*\sigma g(x)),$$

而

$$\text{左式} = -\overline{[g, f](x)} = -\overline{(F(x)\sigma g(x), \sigma f(x))} = (\sigma f(x), -F(x)^*\sigma g(x)),$$

所以

$$(\sigma f(x), (F(x)^* + F(x))\sigma g(x)) = 0.$$

由微分方程存在唯一定理, $\sigma f(x)$ 与 $\sigma g(x)$ 可以取一切 n 维向量. 所以

$$F(x)^* = -F(x).$$

另外, 由 $F(x)F(x)^{-1} = I$ 得

$$(F(x)^{-1})^* F(x)^* = I,$$

所以 $(F(x)^{-1})^* = (F(x)^*)^{-1} = -F(x)^{-1}$.

定义 1.1.5 设 M 是区间 I 上的 n 阶正则微分算式, M 在空间 $L^2(I)$ 上生成的最大算子 $T_1(M)$ 定义如下:

$$\mathcal{D}(T_1(M)) = \{f \mid f \in L^2(I), D^{n-1}f \in AC_{\text{loc}}(I), Mf \in L^2(I)\},$$

$$T_1(M)f = Mf, \quad f \in \mathcal{D}(T_1(M)).$$

由于 $D^{n-1}f \in AC_{\text{loc}}(I)$, 所以 $D^n f$ 在 I 上几乎处处有意义, 于是 Mf 在 I 上几乎处处有意义. 这样得到的 $T_1(M)$ 是一个微分算子. $\mathcal{D}(T_1(M))$ 是 M 所能作用的最大区域, 因而称为最大算子. 由于 $C_0^\infty(\overset{\circ}{I}) \subset \mathcal{D}(T_1(M))$, 而 $C_0^\infty(\overset{\circ}{I})$ 在 $L^2(I)$ 中稠, 所以 $T_1(M)$ 是稠定线性算子.

定义 1.1.6 设 M 是区间 I 上的正则微分算式, $T_1(M)$ 限制在 $C_0^\infty(\overset{\circ}{I})$ 上得到的算子的最小闭延拓称为 M 在 $L^2(I)$ 上生成的最小算子, 记作 $T_0(M)$, 即

$$T_0(M) = \overline{T_1(M)|_{C_0^\infty(\overset{\circ}{I})}}.$$

这也就是说,

$$\mathcal{D}(T_0(M)) = \left\{ f \mid f \in L^2(I), \exists \{f_n\} \subset C_0^\infty(\overset{\circ}{I}), \text{ 使得 } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \lim_{n \rightarrow \infty} Mf_n = g \right\},$$

$$T_0(M)f = g, \quad f \in \mathcal{D}(T_0(M)).$$

下面将证明最小算子 $T_0(M)$ 也是微分算子, 并得出一个微分算子论里重要的关系

$$T_0(M)^* = T_1(M^+).$$

由此可得

$$T_0(M^+)^* = T_1(M).$$

引理 1.1.5 设 M 是 I 上的 n 阶正则微分算式, $f \in \mathcal{D}(T_0(M))$, 则

(1) 当 $I = [a, b]$ 时, $D^k f(a) = D^k f(b) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$;

(2) 当 $I = [a, \infty)$ 时, $D^k f(a) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$.

证明 $f \in \mathcal{D}(T_0(M))$, 所以存在 $\{f_m\} \subset C_0^\infty(a, b)$, 使得 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f, \lim_{m \rightarrow \infty} Mf_m = g$. 由于 $f_m(x)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} My = Mf_m, \\ D^k y(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

的解. 如果设 $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 是 $My = 0$ 的一个基本解组, $\Phi(x)$ 是对应的 Wronski 矩阵

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ D\varphi_1(x) & D\varphi_2(x) & \cdots & D\varphi_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^{n-1}\varphi_1(x) & D^{n-1}\varphi_2(x) & \cdots & D^{n-1}\varphi_n(x) \end{pmatrix},$$

利用常数变易法可得

$$\begin{pmatrix} f_m(x) \\ Df_m(x) \\ \vdots \\ D^{n-1}f_m(x) \end{pmatrix} = \int_a^x \Phi(x) \Phi^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{Mf_m(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix} dt,$$

于是

$$|D^k f_l(x) - D^k f_m(x)| = \left| \int_a^x \frac{\sum_{j=1}^n D^k \varphi_j(x) W_j(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t)}{W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t) a_n(t)} (Mf_l(t) - Mf_m(t)) dt \right|.$$

其中, $W_j(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ 是以 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 换 $W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ 中的第 j 列得到的行

列式, 这样在紧子区间 $[a, a_1]$ 上便有

$$\begin{aligned} |D^k f_l(x) - D^k f_m(x)| &\leq C \int_a^{a_1} |Mf_l(t) - Mf_m(t)| dt \\ &\leq C \sqrt{a_1 - a} \|Mf_l - Mf_m\|. \end{aligned}$$

这表示 $\{D^k f_m(x)\}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ 在 $[a, a_1]$ 上一致收敛, 于是由逐项微分定理得

$$D^k f(a) = \lim_{m \rightarrow \infty} D^k f_m(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

同理, 可证其他情形.

引理给出了 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 中的元素所应当满足的边条件.

引理 1.1.6 设 M 是 $I = [a, b]$ 上的正则微分算式, 则边值问题

$$\begin{cases} My = f, & f \in L^2(I), \\ D^k y(a) = D^k y(b) = 0, & k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

有解的充要条件是

$$f \in (\ker T_1(M^+))^\perp.$$

注 从 Hilbert 空间理论熟知的公式

$$\overline{\operatorname{ran} A} \oplus \ker A^* = H$$

来看, 引理 1.1.6 的结论是不难想到的.

证明 \Rightarrow 设边值问题有解, $g \in \ker T_1(M^+)$, 则

$$\begin{aligned}(f, g) &= (My, g) = (y, M^+g) + [y, g]_a^b \\ &= (y, M^+g) = (y, 0) = 0.\end{aligned}$$

所以 $f \in (\ker T_1(M^+))^\perp$.

\Leftarrow 设 $f \in (\ker T_1(M^+))^\perp$, y 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} My = f, \\ D^k y(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

的解 (由存在唯一定理, 保证了 y 的存在性!), 要证明 $D^k y(b) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$.

对任何 $z \in \ker T_1(M^+)$, 有

$$(My, z) - (y, M^+z) = [y, z]_a^b,$$

即

$$(f, z) - (y, 0) = [y, z](b),$$

所以

$$0 = \left(F(b) \begin{pmatrix} y(b) \\ Dy(b) \\ \vdots \\ D^{n-1}y(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(b) \\ Dz(b) \\ \vdots \\ D^{n-1}z(b) \end{pmatrix} \right).$$

可是对任何 $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, Cauchy 问题

$$\begin{cases} M^+z = 0, \\ D^k z(b) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

都有解, 所以

$$F(b) \begin{pmatrix} y(b) \\ Dy(b) \\ \vdots \\ D^{n-1}y(b) \end{pmatrix} = 0.$$

而 $F(b)$ 非退化, 故 $D^k y(b) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$.

引理 1.1.7 设

(1) S 是 Hilbert 空间 H 的稠密子空间;

(2) V 是 H 的闭子空间, 有有限亏数 n (即商空间 H/V 的维数等于 n).

则 $V \cap S$ 在 V 中稠.

证明 (1) $V \cap S$ 是 S 的闭子空间, $\dim S/(V \cap S) = n$.

(i) 由于 $\dim H/V = n$, 所以 H 中任意 $n+1$ 个非零元素 y_1, \dots, y_{n+1} 必有非平凡的线性组合属于 V .

事实上,

$$\dim V^\perp = \dim V^\perp \oplus V/V = \dim H/V = n.$$

设 V^\perp 的基是 x_1, \dots, x_n , 则

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k (y_k, x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

对于 $a_k, k = 1, \dots, n+1$ 有非零解, 即非平凡线性组合 $\sum_{k=1}^{n+1} a_k y_k \in V$.

(ii) 记 $S_1 = S/V \cap S$, 则 $\dim S_1 \leq n$.

否则, $\dim S_1 > n$, 设 $e_1, \dots, e_{n+1} \in S$, 它们任何不平凡的线性组合都不属于 $V \cap S$. 可是由 (i), 存在不全为零的 a_1, \dots, a_{n+1} , 使得

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k e_k \in V.$$

既然 S 是子空间, 故

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k e_k \in V \cap S.$$

矛盾!

(iii) 证 $\dim S_1 \geq n$. $S = V \cap S + S_1$, 于是 $V + S_1 \supset S$, $V + S_1$ 就在 H 中稠, 但由 (ii) 知 $V + S_1$ 只是 V 的有限维扩张, 既然 V 闭, 那么 $V + S_1$ 也是闭的. 于是

$$V + S_1 = H,$$

所以

$$n = \dim H/V = \dim V + S_1/V \leq \dim S_1.$$

综合 (ii), (iii) 得

$$\dim S/V \cap S = n.$$

(2) $V \cap S$ 在 V 中稠.

否则, 将存在 $0 \neq x_0 \in V$, 使得 $x_0 \perp V \cap S$. 而 $\dim V^\perp = n$, 设 x_1, \dots, x_n 是 V^\perp 的正交基, 于是

$$x_0, x_1, \dots, x_n \perp V \cap S.$$

设 $S_1 = S/V \cap S$ 的基是 z_1, \dots, z_n , 则方程组

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x_k, z_j \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

关于 a_0, a_1, \dots, a_n 应有非零解, 即有不全为 0 的 a_0, a_1, \dots, a_n , 使得

$$\sum_{k=0}^n a_k x_k \perp S_1.$$

因为 $0 \neq x_0 \in V$, 而 $x_1, \dots, x_n \in V^\perp$, 故 $\sum_{k=0}^n a_k x_k \neq 0$. 又因为 $x_0, x_1, \dots, x_n \perp V \cap S$, 故

$$\sum_{k=0}^n a_k x_k \perp V \cap S + S_1 = S.$$

与 S 稠矛盾!

注 M, N 是 X 的闭子空间, $\dim N < \infty$, 则 $M + N$ 闭.

事实上, 定义

$$\sigma: X \rightarrow X/M, \quad \sigma(x) = [x],$$

则

$$\|\sigma(x)\| = \|[x]\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| \leq \|x\|,$$

σ 连续. 而 $\sigma(N)$ 是有限维的, 因而是闭的, 所以 $M + N = \sigma^{-1}(\sigma(N))$ 是闭的!

引理 1.1.8 设 M 是 $I = [a, b]$ 上的 n 阶正则微分算式, 则

$$\mathcal{D}(T_0(M)) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid D^k f(a) = D^k f(b) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1\},$$

$$T_0(M) = T_1(M)|_{\mathcal{D}(T_0(M))}.$$

注 由此可知, $T_0(M)$ 是微分算子, $T_0(M)f = Mf, f \in \mathcal{D}(T_0(M))$.

证明 (1) $T_0(M) \subset T_1(M)|_{\{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) | D^k f(a) = D^k f(b) = 0, k=0,1,\dots,n-1\}}$, 所以 $T_0(M)$ 是微分算子.

设 $f \in \mathcal{D}(T_0(M))$, 则存在 $\{f_m\} \subset C_0^\infty(a,b)$, 使得 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$, $\lim_{m \rightarrow \infty} Mf_m = g$. 由引理 1.1.5 的证明, $\{D^k f_m(x)\}$ 在 $I = [a,b]$ 上一致收敛到 $D^k f(x)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. 因为

$$D^n f_m(x) = \frac{1}{a_n(x)} \left(Mf_m(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) D^k f_m(x) \right),$$

所以

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D^n f_m = h \in L^2[a,b].$$

于是 $h \in L[a,b]$. 由于

$$D^{n-1} f_m(x) = \int_a^x D^n f_m(t) dt$$

的左边一致收敛到 $D^{n-1} f(x)$, 从而右边一致收敛到 $\int_a^x h(t) dt$, 故

$$D^{n-1} f(x) = \int_a^x h(t) dt,$$

即 $D^{n-1} f \in AC[a,b]$ 且 $D^n f(x) = h(x)$ 几乎处处成立. 因为平均收敛必含几乎处处收敛的子列, 所以 $D^n f(x) = \frac{1}{a_n(x)} \left(g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) D^k f(x) \right)$ 几乎处处成立, 即 $Mf - g \in L^2[a,b]$. 这表示 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$. 再用引理 1.1.5, 知

$$T_0(M) \subset T_1(M)|_{\{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) | D^k f(a) = D^k f(b) = 0, k=0,1,\dots,n-1\}}.$$

$$(2) T_1(M)|_{\{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) | D^k f(a) = D^k f(b) = 0, k=0,1,\dots,n-1\}} \subset T_0(M)$$

只要证明 $\mathcal{D}(T_0(M)) \supset \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) | D^k f(a) = D^k f(b) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1\}$ 即可.

(i) 特殊情形 $M = D^n$.

设 $u \in \mathcal{D}(T_1(M))$, $D^k u(a) = D^k u(b) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, 要找 $\{f_m\} \subset C_0^\infty(a,b)$, 使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = u, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} D^n f_m = v = T_1(M)u = Mu,$$

因而 $u \in \mathcal{D}(T_0(M))$. 记 $T_0 = T_1(M)|_{\{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) | D^k f(a) = D^k f(b) = 0, k=0,1,\dots,n-1\}}$, 引理 1.1.6 可改写成

$$\text{ran} T_0 = (\ker T_1(M^+))^\perp,$$

所以 $\text{ran} T_0$ 是闭子空间. 因为 $\ker T_1(M^+)$ 是有限维的, 所以 $\text{ran} T_0$ 有有限亏数. 又 $C_0^\infty(a,b)$ 在 $L^2(a,b)$ 中稠, 故由引理 1.1.7 知 $\text{ran} T_0 \cap C_0^\infty(a,b)$ 在 $\text{ran} T_0$ 中稠. 因为

$$v = Mu = T_0 u \in \text{ran} T_0,$$

所以存在 $\{g_m\} \subset \text{ran} T_0 \cap C_0^\infty(a, b)$, 使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m = v.$$

设 $g_m = T_0 f_m$, 要证明 $\{f_m\} \subset C_0^\infty(a, b)$ 且 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = u$. 因为

$$g_m \in C_0^\infty(a, b), \quad g_m = D^n f_m,$$

所以 $f_m \in C^\infty(a, b)$,

$$D^{n-1} f_m(x) = \int_a^x g_m(t) dt.$$

如果

$$\text{supp} g_m \subset [a_1, b_1] \subset (a, b),$$

则 $a \leq x \leq a_1$ 时, $D^{n-1} f_m(x) = 0$; $b_1 \leq x \leq b$ 时,

$$D^{n-1} f_m(x) = \int_a^b g_m(t) dt = D^{n-1} f_m(b) = 0, \quad f_m \in \mathcal{D}(T_0).$$

这样便得

$$\text{supp} D^{n-1} f_m \subset [a_1, b_1] \subset (a, b).$$

通过逐次积分便知

$$\text{supp} f_m \subset [a_1, b_1] \subset (a, b).$$

另外,

$$\begin{aligned} |D^{n-1} f_m(x) - D^{n-1} u(x)| &= \left| \int_a^x D^n f_m(t) dt - \int_a^x D^n u(t) dt \right| \\ &= \left| \int_a^x g_m(t) dt - \int_a^x v(t) dt \right| \leq \int_a^x |g_m(t) - v(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |g_m(t) - v(t)| dt \leq \sqrt{b-a} \|g_m - v\|, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{m \rightarrow \infty} D^{n-1} f_m(x) = D^{n-1} u(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致成立. 类似地可以证明

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D^k f_m(x) = D^k u(x), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

都在 $[a, b]$ 上一致成立. 特别地, 由 $k = 0$ 知

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = u(x).$$

于是 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = u$.

(ii) 一般情形.

设 $f \in \mathcal{D}(T_0)$ (这里的 T_0 依旧是上一步的 T_0), 则 $D^{n-1}f \in AC[a, b], Mf \in L^2[a, b]$. 于是

$$D^n f = \frac{1}{a_n} \left(Mf - \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k f \right) \in L^2[a, b],$$

因此

$$f \in \mathcal{D}(T_1(D^n)).$$

注意到

$$D^k f(a) = D^k f(b) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

由 (1) 得 $f \in \mathcal{D}(T_0(D^n))$, 因而存在 $\{f_m\} \subset C_0^\infty(a, b)$, 使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D^k f_m(x) = D^k f(x), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

在 $[a, b]$ 上一致成立,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D^n f_m = D^n f$$

按 $L^2[a, b]$ 收敛, 由于 a_k 在 $[a, b]$ 上连续, 故

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Mf_m = Mf,$$

$f \in \mathcal{D}(T_0(M))$.

综合引理 1.1.6 与引理 1.1.8 可得

推论 1.1.3 设 M 是 $I = [a, b]$ 上的 n 阶正则微分算式, 则

$$\text{ran} T_0(M) \oplus \ker T_1(M^+) = L^2[a, b].$$

可见, 闭区间上正则微分算式生成的最小算子有闭值域.

定理 1.1.4 设 M 是 $I = [a, b]$ 上的 n 阶正则微分算式, 则

$$T_0(M)^* = T_1(M^+).$$

证明 (1) $T_0(M)^* \supset T_1(M^+)$.

设 $g \in \mathcal{D}(T_1(M^+))$, 对任何 $f \in \mathcal{D}(T_0(M))$, 因为

$$D^k f(a) = D^k f(b) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

所以由 Green 公式,

$$(Mf, g) - (f, M^+g) = [f, g]_a^b = 0,$$

即

$$(T_0(M)f, g) = (f, M^+g),$$

所以

$$g \in \mathcal{D}(T_0(M)^*), \quad T_0(M)^*g = M^+g = T_1(M^+)g.$$

$$(2) T_0(M)^* \subset T_1(M^+).$$

只需证明 $\mathcal{D}(T_0(M)^*) \subset \mathcal{D}(T_1(M^+))$ 即可.

$$(i) \operatorname{ran} T_1(M^+) = L^2(I).$$

设 $f \in L^2(I)$. 由于 I 紧, 所以 $f \in L(I)$. 根据存在唯一性定理, 对任何

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \text{ Cauchy 问题}$$

$$\begin{cases} M^+y = f, \\ D^k y(a) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

有唯一解, 所以 $\operatorname{ran} T_1(M^+) = L^2(I)$.

$$(ii) \mathcal{D}(T_0(M)^*) \subset \mathcal{D}(T_1(M^+)).$$

设 $f \in \mathcal{D}(T_0(M)^*)$, 由 (i) 知存在 $g \in \mathcal{D}(T_1(M^+))$, 使得

$$T_1(M^+)g = T_0(M)^*f.$$

但 $T_1(M^+) \subset T_0(M)^*$, 故

$$T_0(M)^*(f - g) = 0.$$

这样对任何 $u \in \mathcal{D}(T_0(M))$, 便有

$$(T_0(M)u, f - g) = (u, T_0(M)^*(f - g)) = 0$$

即 $(f - g) \perp \operatorname{ran} T_0(M)$, 由推论 1.1.3 知 $(f - g) \in \ker T_1(M^+)$, 而 $g \in \mathcal{D}(T_1(M^+))$, 故 $f \in \mathcal{D}(T_1(M^+))$.

下面考虑一般的区间.

定理 1.1.5 设 M 是 I 上的正则微分算式, 则

$$T_0(M)^* = T_1(M^+).$$

证明 (1) $T_0(M)^* \supset T_1(M^+)$.

设 $g \in \mathcal{D}(T_1(M^+))$, 对任何 $f \in C_0^\infty(I)$, 由 Green 公式有

$$(Mf, g) = (f, M^+g),$$

即

$$(T_0(M)f, g) = (f, T_1(M^+)g).$$

取极限知这个等式对一切 $f \in \mathcal{D}(T_0(M))$ 都成立, 所以

$$g \in \mathcal{D}(T_0(M)^*), \quad T_0(M)^*g = T_1(M^+)g.$$

$$(2) \quad T_0(M)^* \subset T_1(M^+)$$

只需证明 $\mathcal{D}(T_0(M)^*) \subset \mathcal{D}(T_1(M^+))$ 即可. 设 $g \in \mathcal{D}(T_0(M)^*)$, $[\alpha, \beta]$ 是 I 的任意紧子区间. 对任意的 $f \in C_0^\infty(\alpha, \beta) \subset C_0^\infty(\overset{\circ}{I})$, 有

$$(T_0(M)f, g) = (f, T_0(M)^*g),$$

即

$$(Mf, g) = (f, T_0(M)^*g).$$

记 $(\cdot, \cdot)_1$ 是 $L^2[\alpha, \beta]$ 的内积, $g_1 = g|_{[\alpha, \beta]}$, $(T_0(M)^*g)_1 = T_0(M)^*g|_{[\alpha, \beta]}$, $M_1 = M|_{[\alpha, \beta]}$, 则

$$(M_1f, g_1)_1 = (f, (T_0(M)^*g)_1)_1, \quad f \in C_0^\infty(\alpha, \beta).$$

取极限, 上面这个等式就对一切 $f \in \mathcal{D}(T_0(M_1))$ 都成立, 所以

$$g_1 \in \mathcal{D}(T_0(M_1)^*), \quad T_0(M_1)^*g_1 = (T_0(M)^*g)_1,$$

可是

$$\mathcal{D}(T_0(M_1)^*) = \mathcal{D}(T_1((M_1)^+)) = \mathcal{D}(T_1((M^+)_1)),$$

其中, $(M^+)_1 = M^+|_{[\alpha, \beta]}$. 于是

$$D^{n-1}g_1 \in AC[\alpha, \beta],$$

$$(M^+)_1g_1 = (M^+g)_1 = (T_0(M)^*g)_1.$$

由于 $[\alpha, \beta]$ 是任意的, 故得

$$D^{n-1}g \in AC_{\text{loc}}(I),$$

$$M^+g = T_0(M)^*g \in L^2(I).$$

这样便有 $g \in \mathcal{D}(T_1(M^+))$.

推论 1.1.4 设 M 是 I 上的正则微分算式, 则

(1) $T_1(M)$ 是闭算子;

(2) $T_0(M) \subset T_1(M)$ (所以 $T_0(M)$ 也是微分算子, $T_0(M)f = Mf$).

证明 因为

$$T_1(M) = T_1(M^{++}) = T_0(M^+)^*,$$

所以, $T_1(M)$ 是闭算子. 因为

$$T_1(M)|_{C_0^\infty(I)} \subset T_1(M),$$

所以 $T_0(M) = \overline{T_1(M)|_{C_0^\infty(I)}} \subset T_1(M)$.

· 对于 $I = [a, \infty)$ 情形, 有如下推论:

推论 1.1.5 如果 M 为 $[a, \infty)$ 上的正则微分算式, 则 $f \in \mathcal{D}(T_0(M)) \Leftrightarrow f \in \mathcal{D}(T_1(M))$ 而 $D^k f(a) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$ 且对任何 $g \in \mathcal{D}(T_1(M^+))$ 有 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f, g](x) = 0$.

证明 $f \in \mathcal{D}(T_1(M)), g \in \mathcal{D}(T_1(M^+))$,

$$0 \equiv (Mf, g) - (f, M^+g) = \lim_{x \rightarrow \infty} [f, g]_a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f, g](x).$$

1.2 微分算子的亏指数

已经知道 Hilbert 空间里对称算子的亏指数的概念. 由 von Neumann 分解公式

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(\bar{A}) \dot{+} K_+ \dot{+} K_-,$$

其中,

$$K_+ = \ker(A^* - iI), \quad K_- = \ker(A^* + iI)$$

是 A 的两个亏子空间, 它们的维数乃是 A 的亏指数 (d_+, d_-) .

现在把亏指数的概念推广到一般的非对称微分算子的情形.

定义 1.2.1 设 M 是 I 上的正则微分算式, 称

$$d(M) = \frac{1}{2} \dim \mathcal{D}(T_1(M)) / \mathcal{D}(T_0(M))$$

为 M 的亏指数 (或 $T_0(M)$ 的亏指数).

当 M 对称时, $M^+ = M, T_0(M)^* = T_1(M^+) = T_1(M)$, 所以由 von Neumann 公式可得

$$d(M) = \frac{1}{2}(d_+ + d_-).$$

但是实对称正则微分算式的两个亏指数是相等的, 所以 $d(M) = d_+ = d_-$, 因此新定义的亏指数与原来的亏指数概念一致.

引理 1.2.1 设 M 是 $[a, \infty)$ 上的正则微分算式, 则 $T_1(M)$ 的值域在 $L^2[a, \infty)$ 中稠.

证明 因为

$$\overline{\text{ran} T_1(M)} \oplus \ker T_1(M)^* = L^2[a, \infty),$$

所以

$$\overline{\text{ran} T_1(M)} \oplus \ker T_0(M^+) = L^2[a, \infty).$$

如果 $f \in \ker T_0(M^+)$, 则由 Cauchy 问题的存在唯一性知

$$\begin{cases} M^+ f = 0, \\ D^k f(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

$f = 0$, 所以 $\text{ran} T_1(M)$ 在 $L^2[a, \infty)$ 中稠.

注 从证明可以看出最小算子是单射, 因而逆算子存在.

引理 1.2.2 设 M 是 $[a, \infty)$ 上的 n 阶正则微分算式, 则

$$2d(M) \geq \text{nullity} T_1(M^+) + \text{nullity}(T_1(M)),$$

其中, $\text{nullity} T_1(M) = \dim \ker T_1(M)$, 即 $My = 0$ 线性无关的平方可积解的个数.

证明 设 $\text{nullity} T_1(M^+) = k$, 由于

$$2d(M) = \dim \mathcal{D}(T_1(M)) / \mathcal{D}(T_0(M)),$$

$$\mathcal{D}(T_0(M)) \cap \ker T_1(M) = \{0\},$$

因此

$$\mathcal{D}(T_1(M)) = \mathcal{D}(T_0(M)) \dot{+} \ker T_1(M) \dot{+} \mathcal{D}(T_1(M)) / (\mathcal{D}(T_0(M)) \dot{+} \ker(T_1(M))),$$

所以要证明

$$\dim \mathcal{D}(T_1(M)) / (\mathcal{D}(T_0(M)) \dot{+} \ker T_1(M)) \geq k.$$

对任意的 $g \in \mathcal{D}(T_1(M))$, 把它分解成

$$g = g_1 + g_2 + g_3,$$

其中,

$$g_1 \in \mathcal{D}(T_1(M)) / (\mathcal{D}(T_0(M)) \dot{+} \ker T_1(M)), \quad g_2 \in \mathcal{D}(T_0(M)), \quad g_3 \in \ker T_1(M),$$

则

$$\begin{aligned} T_1(M)g &= T_1(M)g_1 + T_1(M)g_2 = T_1(M)g_1 + T_0(M)g_2, \\ T_1(M)g_1 &= T_1(M)g - T_0(M)g_2. \end{aligned}$$

于是

$$\{T_1(M)g_1 | g_1 \in \mathcal{D}(T_1(M))/(\mathcal{D}(T_0(M)) \dot{+} \ker T_1(M))\} = \text{ran} T_1(M)/\text{ran} T_0(M).$$

可是

$$\overline{\text{ran} T_0(M)} \oplus \ker T_1(M^+) = L^2[a, \infty),$$

即 $\overline{\text{ran} T_0(M)}$ 是具有有限亏数 k 的闭子空间. 由于 $\text{ran} T_1(M)$ 稠, 根据引理 1.1.7 的证明,

$$\dim \text{ran} T_1(M)/(\overline{\text{ran} T_0(M)} \cap \text{ran} T_1(M)) = k.$$

显然

$$\text{ran} T_1(M) \cap \overline{\text{ran} T_0(M)} \supset \text{ran} T_1(M) \cap \text{ran} T_0(M) = \text{ran} T_0(M).$$

故由

$$\begin{aligned} & \{T_1(M)g_1 | g_1 \in \mathcal{D}(T_1(M))/(\mathcal{D}(T_0(M)) \dot{+} \ker T_1(M))\} \\ &= \text{ran} T_1(M)/\text{ran} T_0(M) \supset \text{ran} T_1(M)/(\text{ran} T_1(M) \cap \overline{\text{ran} T_0(M)}) \end{aligned}$$

知 $\dim \mathcal{D}(T_1(M))/\mathcal{D}(T_0(M)) \dot{+} \ker T_1(M) \geq k$.

注 对于 $I = [a, b]$, 结论亦真.

引理 1.2.3 设 M 是 I ($[a, b]$ 或 $[a, \infty)$) 上的正则微分算式. 则下列三条等价:

- (1) $T_0(M)$ 有闭值域;
- (2) $\text{ran} T_1(M) = L^2(I)$;
- (3) $T_0(M^+)$ 有闭值域.

证明 (1) \Rightarrow (2) 由于

$$\text{ran} T_0(M) \oplus \ker T_1(M^+) = L^2(I),$$

而 $\ker T_1(M^+)$ 是有限维的, 于是 $\text{ran} T_1(M)$ 是 $\text{ran} T_0(M)$ 的有限维扩张, 因而也是闭的. 可是 $\text{ran} T_1(M)$ 稠, 故 $\text{ran} T_1(M) = L^2(I)$.

(2) \Rightarrow (3) 设 $\text{ran} T_1(M)$ 闭, 由闭值域定理 (Yosida, 《Functional Analysis》, p.205), 它的共轭算子 $T_1(M)^* = T_0(M^+)^{**} = T_0(M^+)$ 有闭值域.

(3) \Rightarrow (1) $\text{ran} T_0(M^+)$ 闭, 故 $\text{ran} T_1(M^+) = L^2(I)$ 是闭的, 由闭值域定理 $T_0(M) = T_1(M^+)^*$ 有闭值域.

定理 1.2.1 设 M 是 $[a, \infty)$ 上的正则微分算式, $T_0(M)$ 有闭值域. 则

$$2d(M) = \text{nullity} T_1(M^+) + \text{nullity} T_1(M).$$

证明 由于 $2d(M) = \dim \mathcal{D}(T_1(M))/\mathcal{D}(T_0(M))$, 所以应当考虑最小算子 $T_0(M)$ 是怎样通过定义域的扩充而变成最大算子 $T_1(M)$ 的. 首先, 当然是把零空间 $\ker T_1(M)$ 的基元素添加进来, 由存在唯一定理, $\ker T_1(M) \cap \mathcal{D}(T_0(M)) = \{0\}$, 所以这

些元素并不在 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 中. 但是把它们添加进来以后算子的值域并没有增加新元素, 仍然是 $\text{ran}T_0(M)$. 由于 $\text{ran}T_0(M)$ 闭, 由引理 1.2.3, $\text{ran}T_1(M) = L^2[a, \infty)$. 由于

$$L^2[a, \infty) = \text{ran}T_0(M) \oplus \ker T_1(M^+),$$

所以, 再扩充时必须得让 $\ker T_1(M^+)$ 的基元素 $\{g_1, \dots, g_m\}$ 都出现在扩充了的算子值域中. 因为 $\text{ran}T_1(M) = L^2[a, \infty)$, 所以存在 $f_j \in \mathcal{D}(T_1(M))$, 使得

$$T_1(M)f_j = g_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

由于 $\{g_1, \dots, g_m\}$ 线性无关, $\{f_1, \dots, f_m\}$ 也必然线性无关, 而且它们显然不能在 $\mathcal{D}(T_0(M)) \dot{+} \ker T_1(M)$ 中, 把这些 f_j 添加进来便可使得算子的值域是全空间. 所以以下要证明

$$\mathcal{D}(T_1(M))/\mathcal{D}(T_0(M)) = \ker T_1(M) \dot{+} \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}.$$

因为对任意的 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$,

$$Mf = u + v, \quad u \in \text{ran}T_0(M), \quad v \in \ker T_1(M^+).$$

所以存在 $g \in \mathcal{D}(T_0(M))$ 使得 $u = Mg$, 而 $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j$, 从而

$$Mf = Mg + \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j = Mg + \sum_{j=1}^m \alpha_j Mf_j.$$

于是

$$M \left(f - g - \sum_{j=1}^m \alpha_j f_j \right) = 0, \quad f - g - \sum_{j=1}^m \alpha_j f_j \in \ker T_1(M),$$

即

$$f = g + \left(f - g - \sum_{j=1}^m \alpha_j f_j \right) + \sum_{j=1}^m \alpha_j f_j,$$

其中, 右边第 1 项在 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 中, 第 2 项在 $\ker T_1(M)$ 中, 第 3 项在 $\text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$ 中, 故

$$2d(M) = \text{nullity}T_1(M^+) + \text{nullity}T_1(M).$$

注 对 $I = [a, b]$, 结论亦真.

推论 1.2.1 设 M 是 $[a, b]$ 上的正则微分算式, 则 $d(M) = M$ 的阶数.

定理 1.2.2 设 M 是 $[a, \infty)$ 上的正则微分算式, f 是 $[a, \infty)$ 上的有界复值可测函数, 则 $d(M + f) = d(M)$.

证明 $\mathcal{D}(T_1(M + f)) = \mathcal{D}(T_1(M))$. 如果 $\{f_n\} \subset C_0^\infty(a, \infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = h$, $\{Mf_n\}$ 是 Cauchy 列的充要条件是 $\{(M + f)f_n\}$ 是 Cauchy 列, 因此

$$\mathcal{D}(T_0(M + f)) = \mathcal{D}(T_0(M)).$$

故 $d(M + f) = d(M)$.

定理 1.2.3 设 M 是 $[a, \infty)$ 上的 n 阶正则微分算式, 则 $d(M) \geq \frac{n}{2}$.

证明 对每个 $j = 1, \dots, n$, 取一个 n 阶多项式 p_j , 使得

$$D^{k-1}p_j(a) = \delta_{jk}, \quad k = 1, \dots, n,$$

以该多项式的 $n + 1$ 个系数作为未知数, 方程只有 n 个, 所以总有解, 这样的 p_j 总存在. 令

$$f_j = hp_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

其中, h 是引理 1.1.4 中的 C_0^∞ 函数, 在 a 点及其附近取值为 1, 则 $f_j \in \mathcal{D}(T_1(M))/\mathcal{D}(T_0(M))$. $\mathcal{D}(T_0(M))$ 中函数 f 要满足 $f(a) = \dots = D^{n-1}f(a) = 0$ 且 f_1, \dots, f_n 线性无关, 所以

$$d(M) \geq \frac{n}{2}.$$

定义 1.2.2 设 M 是 $[a, \infty)$ 上的 n 阶正则微分算式, 如果 $d(M) = \frac{n}{2}$, 则称 M 属于极限点情形.

这一名称来自 Weyl 对实的二阶 Sturm-Liouville 微分算子

$$M = -DpD + q$$

的研究, 他证明了 M 可以分成两类 (见 3.2 节), 考虑对称算子 $T_0(M)$,

(1) $T_0(M)$ 的亏指数为 $(1, 1)$ ——极限点型;

(2) $T_0(M)$ 的亏指数为 $(2, 2)$ ——极限圆型.

下面给出几个判别微分算式为极限点的准则.

定理 1.2.4 设 M 是 $[a, \infty)$ 上的 n 阶正则微分算式, $T_0(M)$ 有闭值域, 则 M 属于极限点情形的充分必要条件是

$$\text{nullity } T_1(M^+) + \text{nullity } T_1(M) = n.$$

这是定理 1.2.1 的自然结论.

推论 1.2.2 设 M 是 $[a, \infty)$ 上的 $2n$ 阶实对称正则微分算式, $T_0(M)$ 有闭值域, 如果对任何 $f, g \in \ker T_1(M)$ 都有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f, g](x) = 0,$$

则 M 是极限点的.

证明 要证明 $\text{nullity} T_1(M) = n$. 记 $\text{nullity} T_1(M) = m$. 对任何 $f, g \in \ker T_1(M)$, 由 Green 公式和条件知

$$[f, g](a) = 0.$$

由 Cauchy 问题解的存在唯一定理, $My = 0$ 的解空间与 \mathbb{C}^{2n} 同构, 同构对应就是

$$\sigma f = \begin{pmatrix} f(a) \\ Df(a) \\ \vdots \\ D^{2n-1}f(a) \end{pmatrix},$$

而等式

$$0 = [f, g](a) = (F(a)\sigma f, \sigma g), \quad f, g \in \ker T_1(M)$$

则表示 \mathbb{C}^{2n} 的两个子空间 $\{F(a)\sigma f | f \in \ker T_1(M)\}$, $\{\sigma g | g \in \ker T_1(M)\}$ 是正交的. 由于 $F(a)$ 非退化, 它们的维数都是 m , 故 $m \leq n$. 可是由定理 1.2.1 和定理 1.2.3, 又应有

$$m = \text{nullity} T_1(M) = d(M) \geq n.$$

引理 1.2.4 设 M 是 $[a, \infty)$ 上属于极限点情形的正则微分算式, 则对任何 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$ 都存在 $g \in \mathcal{D}(T_0(M))$, 使得 $f - g \in C^\infty$ 且 $\text{supp}(f - g)$ 紧.

证明 因为 $2d(M) = n$, 所以定理 1.2.3 证明中的那些 f_1, \dots, f_n 组成了 $\mathcal{D}(T_1(M))/\mathcal{D}(T_0(M))$ 的一个基, 于是任何 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$ 都可以表示成

$$f = g + \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k,$$

其中, $g \in \mathcal{D}(T_0(M))$, 而 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是一些常数, 显然

$$f - g = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \in C^\infty$$

且 $\text{supp}(f - g)$ 紧.

这样, 函数 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$ 在无穷远处的性态便由 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 中某个函数在无穷远处的性态决定!

定理 1.2.5 设 M 是 $[a, \infty)$ 上的正则微分算式, 则 M 属于极限点情形的充分且必要条件是对任意的 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$, $g \in \mathcal{D}(T_1(M^+))$ 都有 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f, g](x) = 0$.

证明 \Rightarrow 由引理 1.2.4, 不妨假设 $f \in \mathcal{D}(T_0(M))$, 因为 $T_1(M^+) = T_0(M)^*$, 所以

$$(T_0(M)f, g) = (f, T_1(M^+)g),$$

即

$$(Mf, g) = (f, M^+g).$$

由 Green 公式,

$$\int_a^x Mf(t)\overline{g(t)}dt - \int_a^x f(t)\overline{M^+g(t)}dt = [f, g]_a^x = [f, g](x),$$

取极限得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f, g](x) = (Mf, g) - (f, M^+g) = 0.$$

\Leftarrow (1) 令 T 表示 $T_1(M)$ 在集合

$$\{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid D^k f(a) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1\}$$

上的限制, 则 T 是闭线性算子.

事实上, 设 $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} T f_n = h$. 因为 $T_1(M)$ 是闭线性算子, 所以 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$, $h = Mf$. 为了得到 T 是闭的, 只要证明 $D^k f(a) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$. 由于 $T_1(M)$ 闭, 在 $\mathcal{D}(T_1(M))$ 上定义新内积

$$(f, g)_1 = (f, g) + (Mf, Mg),$$

则 $(\mathcal{D}(T_1(M)), (\cdot, \cdot)_1)$ 是个 Hilbert 空间. 考虑它上面的另一个模

$$\|f\|_2 = \|f\|_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \max_{a \leq x \leq b} |D^k f(x)|,$$

其中, $b > a$. 不难证明 $(\mathcal{D}(T_1(M)), \|\cdot\|_2)$ 是一个 Banach 空间. 因为 $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$, 由逆算子定理, $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价. 显然 $D^k f(a), k = 0, 1, \dots, n-1$ 都是 $(\mathcal{D}(T_1(M)), \|\cdot\|_2)$ 上的连续线性泛函, 所以它们也是 $(\mathcal{D}(T_1(M)), \|\cdot\|_1)$ 上的连续线性泛函. 注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, 便得 $D^k f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} D^k f_n(a) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$.

(2) $T = T_0(M)$ (极限点情形时最小算子定义域的刻画).

显然 $T_0(M) \subset T$, 所以 $T^* \subset T_0(M)^* = T_1(M^+)$. 另外, 如果 $g \in \mathcal{D}(T_1(M^+))$, 对任何的 $f \in \mathcal{D}(T)$, 由 Green 公式,

$$\int_a^x Mf(t)\overline{g(t)}dt - \int_a^x f(t)\overline{M^+g(t)}dt = [f, g]_a^x(x),$$

让 $x \rightarrow \infty$ 得

$$(Mf, g) = (f, M^+g).$$

这说明 $g \in \mathcal{D}(T^*)$ 且 $T^*g = M^+g$. 因此又有 $T_1(M^+) \subset T^*$. 故 $T^* = T_1(M^+)$. 于是

$$T - \bar{T} = T^{**} - T_1(M^+)^* = T_0(M)^{**} - T_0(M).$$

(3) M 为极限点型.

对任何 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$, 取 $v \in C^\infty$ 使得 $D^k v(a) = D^k f(a), k = 0, 1, \dots, n-1$, $\text{supp } v$ 紧, 则 $v \in \mathcal{D}(T_1(M))$, 而 $f - v \in \mathcal{D}(T_0(M))$. 这表示 $\mathcal{D}(T_1(M))/\mathcal{D}(T_0(M))$ 是由那些 $D^k v(a), k = 0, 1, \dots, n-1$ 中至少有一个不为零的 v 组成, 显然线性无关的这种 v 有 n 个, 故 $d(M) = \frac{1}{2} \dim \mathcal{D}(T_1(M))/\mathcal{D}(T_0(M)) = \frac{n}{2}$.

推论 1.2.3 设 $M = P + Q$ 是 $[a, \infty)$ 上的正则微分算式, $T_0(M)$ 有闭值域, P, Q 都是极限点的实对称正则微分算式, 如果对任何 $f \in \ker T_1(M)$ 都有 $Pf, Qf \in L^2[a, \infty)$, 则 M 也是极限点的.

证明 注意到

$$[\cdot, \cdot]_M = [\cdot, \cdot]_P + [\cdot, \cdot]_Q.$$

由推论 1.2.2 和定理 1.2.5 可得.

定理 1.2.6 设 M 是 $[a, \infty)$ 上的正则微分算式, 则 M 属于极限点情形的充分必要条件是任何 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$ 都可以表成一个 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 的元素与一个具紧支集的无穷次可微函数的和.

证明 \Rightarrow 即引理 1.2.4.

\Leftarrow 对任何的 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$ 和 $g \in \mathcal{D}(T_1(M^+))$, 设

$$f = f_0 + (f - f_0),$$

其中, $f_0 \in \mathcal{D}(T_0(M))$, $(f - f_0) \in C^\infty$ 且 $\text{supp}(f - f_0)$ 紧. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [f, g](x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f_0 + (f - f_0), g](x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [f_0, g](x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f_0, g]_a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_a^x M f_0(t) \overline{g(t)} dt - \int_a^x f_0(t) \overline{M^+ g(t)} dt \right) \\ &= (M f_0, g) - (f_0, M^+ g) = (T_0(M) f_0, g) - (f_0, T_1(M^+) g) \\ &= 0. \end{aligned}$$

根据定理 1.2.5, M 为极限点型.

从以上这条定理可以看出, 微分算式是否属于极限点情形取决于最小算子定义域中的函数在无穷远处具有什么样的渐近性质.

为什么要对亏指数的判别, 尤其是对算子是否为极限点感兴趣呢? 根据 Hilbert 空间的算子理论知道亏指数的情况与算子是否有自伴延拓, 若有, 自伴延拓如何构造, 有直接的关系. 而自伴性则与微分方程定解问题是否适定是等价的. M. Reed 和 B. Simon 在 *Methods of Modern Mathematical Physics Vol.2* 里写道: “The existence of solutions of the basic dynamics equations in quantum mechanics and quantum field theory is equivalent to proving that the Hamiltonian is self-adjoint.” (Chap.10 读者指南) 该书给出了许多具体例子的讨论. 这里只看到了实对称常微分算子的情形, 至于非对称的某些特殊类型常微分算子也有相应的结果. 但是对一般的常微分算子亏指数与适定性的关系尚未见有人讨论.

假设 M 是 $[a, \infty)$ 上实对称的 $2n$ 阶正则微分算式

$$M = \sum_{k=0}^n (-1)^k D^k p_k(x) D^k,$$

其中, $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$ 都是非负的 C^∞ 函数, $p_n(x) > 0$, $p_0(x) \geq \varepsilon > 0$. M 的亏指数与下述的微分方程“两点”边值问题的适定性有密切的关系:

$$\begin{cases} Mf = g, & g \in L^2[a, \infty), \\ D^k f(a) = 0, & k = 0, 1, \dots, n-1, \\ f \in L^2[a, \infty). \end{cases} \quad (P)$$

令

$$S = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} \right) \middle| a_1 = \dots = a_n = 0 \right\},$$

这是 \mathbf{C}^{2n} 的 n 维子空间. 记

$$\sigma f = \begin{pmatrix} f(a) \\ Df(a) \\ \vdots \\ D^{2n-1}f(a) \end{pmatrix}.$$

问题 (P) 乃是求一解, 它在 a 点与无穷远点取一定的值: 边条件

$$\sigma f \in S, \quad f \in L^2[a, \infty),$$

分别规定 f 在 a 点和无穷远点的状态. 对任何 $f, g \in C^\infty[a, \infty)$, 若 $\text{supp } f, \text{supp } g$ 紧且

$$\sigma f, \sigma g \in S,$$

有

$$(Mf, g) = (f, Mg).$$

事实上, 因为由 Green 公式得

$$(Mf, g) - (f, Mg) = \lim_{x \rightarrow \infty} [f, g]_a^x = -[f, g](a).$$

而

$$F(a)\sigma f = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & * \\ \vdots & * & & \\ * & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma g = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix},$$

所以

$$[f, g](a) = (F(a)\sigma f, \sigma g) = 0.$$

这表明 $T_1(M)$ 限制在集合

$$\mathcal{D} = \{f | f \in C^\infty[a, \infty), \text{supp } f \text{ 紧}, \sigma f \in S\}$$

上得到的算子 R 是一个对称线性算子. 不仅如此, R 还是下半有界的. 这是因为当 $f \in \mathcal{D}$ 时,

$$\begin{aligned} (Rf, f) &= \sum_{k=0}^n \int_a^\infty (-1)^k D^k p_k(x) D^k f(x) \cdot \overline{f(x)} dx \\ &= \sum_{k=0}^n \int_a^\infty p_k(x) |D^k f(x)|^2 dx \geq \int_a^\infty p_0(x) |f(x)|^2 dx \\ &\geq \varepsilon \|f\|^2. \end{aligned}$$

定理 1.2.7 问题 (P) 的解存在.

证明 设 F_R 是 \mathbf{R} 的 Friedrichs 延拓. 它有以下两条性质:

- (1) $(F_R f, f) \geq \varepsilon \|f\|^2, f \in \mathcal{D}(F_R);$
- (2) $\text{ran } F_R = L^2[a, \infty), F_R^{-1}$ 存在且为 $L^2[a, \infty)$ 上的有界线性算子.

因为

$$\|F_R f\| \|f\| \geq \varepsilon \|f\|^2, \quad \|F_R f\| \geq \varepsilon \|f\|,$$

所以

$$\|F_R^{-1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

为了求问题 (P) 的解 f , 只要取 $f = F_R^{-1}g$ 即可. 但是 F_R 是否为微分算子. 因而 $F_R f = Mf$? 另外, f 是否满足边条件 $\sigma f \in S$?

因为

$$T_1(M)|_{C_0^\infty(a, \infty)} \subset R,$$

所以

$$R^* \subset (T_1(M)|_{C_0^\infty(a, \infty)})^* = T_0(M)^* = T_1(M),$$

而 $R \subset F_R$. 故 $F_R \subset R^* \subset T_1(M)$, F_R 是微分算子. 其次, 对任何 $f \in \mathcal{D}(F_R)$ 和任何 $h \in \mathcal{D}(R)$ 都有

$$(F_R h, f) = (h, F_R f),$$

即

$$(Mh, f) = (h, Mf).$$

根据 Green 公式,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [h, f]_a^x = 0.$$

注意到 $h \in \mathcal{D}(R)$, 故

$$0 = [h, f](a) = (F(a)\sigma h, \sigma f).$$

当 h 取遍 \mathcal{D} 中点时, 可以让 σh 取遍 S 的向量 (让一个 $2n$ 阶的多项式在 a 点逐级导数取值为 S 中的某向量, 将它在远处截断, 光滑化即得所要的 h), 而

$$F(a)\sigma h \in S^\perp,$$

因为 $F(a)$ 非退化, $F(a)S$ 也是 n 维子空间. 于是

$$F(a)S = S^\perp,$$

所以 $\sigma f \in S$, 即 F_R 定义域中的函数均满足 a 点的边条件. 综合这两条便知 $f = F_R^{-1}g$ 是问题 (P) 的解.

定理 1.2.8 问题 (P) 适定的充要条件是 M 为极限点型.

证明 \Rightarrow 假若不然, 设 $d(M) = l > n$. 首先证明 $T_0(M)$ 有闭值域.

对任意的 $f \in C_0^\infty(a, \infty)$, 有

$$(Mf, f) = \sum_{k=0}^n \int_a^\infty p_k(x) |D^k f(x)|^2 dx \geq \varepsilon \|f\|^2,$$

通过取极限知道这个不等式对一切 $f \in \mathcal{D}(T_0(M))$ 都成立. 于是由

$$\|Mf\| \|f\| \geq (Mf, f) \geq \varepsilon \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{D}(T_0(M)),$$

得

$$\|Mf\| \geq \varepsilon \|f\|, \quad f \in \mathcal{D}(T_0(M)).$$

如果序列 $\{Mf_n\} \subset \text{ran} T_0(M)$ 收敛到 g , 则由上面的不等式知 $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T_0(M))$ 是 Cauchy 列, 故有 $f \in L^2[a, \infty)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$

注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Mf_n = g$$

且 $T_0(M)$ 是闭算子, 必有 $f \in \mathcal{D}(T_0(M))$ 且 $g = T_0(M)f$. 所以 $\text{ran} T_0(M)$ 是闭的. 这样, 由定理 1.2.1

$$d(M) = \text{nullity} T_1(M).$$

于是 $Mf = 0$ 便有 l 个线性无关的平方可积解, 记它们为 f_1, \dots, f_l .

设 f 是问题 (P) 的解, 考虑函数

$$f + \sum_{k=1}^l \alpha_k f_k,$$

方程组

$$\sum_{k=1}^l \alpha_k D^j f_k(a) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

必有非零解 $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. 这样 $f + \sum_{k=1}^l \alpha_k f_k$ 便是问题 (P) 不同于 f 的另一个解, 矛盾! 结合定理 1.2.3, 有 $l = n$.

⇐ 如果问题 (P) 的解不唯一, 则问题

$$\begin{cases} Mf = 0, \\ \sigma f \in S, \\ f \in L^2[a, \infty) \end{cases}$$

就有一个非零解 h . 记 H 为 $T_1(M)$ 在集合

$$\mathcal{D}(H) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \sigma f \in S\}$$

上的限制, 则 $Hh = 0$, 即 $0 \in \sigma(H)$, 但

$$(H\varphi, \varphi) \geq \varepsilon(\varphi, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(H),$$

如果 H 自伴, 则 $0 \in \rho(H)$, 这样便出现了矛盾! 问题就变成去证明 H 是自伴的. 显然

$$T_0(M) \subset H,$$

所以

$$H^* \subset T_1(M).$$

于是 H^* 是微分算子. 对任意的 $f, g \in \mathcal{D}(H)$, 利用 Green 公式和定理 1.2.5,

$$\begin{aligned} (Hf, g) - (f, Hg) &= (Mf, g) - (f, Mg) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x \left(Mf(t)\overline{g(t)} - f(t)\overline{Mg(t)} \right) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f, g]_a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f, g](x) = 0, \end{aligned}$$

所以 $H \subset H^*$.

如果 $f \in \mathcal{D}(H^*)$, 则对任何 $g \in \mathcal{D}(H)$, 有

$$(Hg, f) = (g, H^*f),$$

即

$$(Mg, f) = (g, Mf),$$

因而由 Green 公式知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [g, f]_a^x = 0,$$

但是根据定理 1.2.5, $\lim_{x \rightarrow \infty} [g, f](x) = 0$, 因而

$$[g, f](a) = (F(a)\sigma g, \sigma f) = 0, \quad g \in \mathcal{D}(H),$$

即

$$\sigma f \perp S^\perp,$$

所以 $\sigma f \in S, f \in \mathcal{D}(H)$. 这样便又得到 $H^* \subset H$, 故 H 自伴.

由此可见, 判别一个微分算式是否为极限点是关系到边值问题是否适定的问题.

定理 1.2.9 问题 (P) 适定的充要条件是 R 本质自伴.

注 对偏微分算子人们多半是通过本质自伴性去研究适定性.

证明 \Rightarrow P 适定, 则 M 极限点, 算子 H 定义如定理 1.2.8 所述, 它是自伴的. 下面来证明 $H = \bar{R}$.

(1) $R \subset H$, 因而 $\bar{R} \subset H$;

(2) 为了证明 $H \subset \bar{R}$, 只需证明 $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(\bar{R})$.

设 $f \in \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(T_1(M))$, 因为 M 是极限点的, f 可以分解成

$$f = f_1 + f_2,$$

其中, $f_1 \in \mathcal{D}(T_0(M))$, $f_2 \in C^\infty$, $\text{supp} f_2$ 紧. 由于 $\sigma f \in S$, 而 $\sigma f_1 \in S$, 故 $\sigma f_2 \in S$. 由最小算子 $T_0(M)$ 的定义, 存在 $\{g_m\} \subset C_0^\infty(a, \infty)$, 使得 $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m = f_1$ 且 $\{Mg_m\}$ 是 Cauchy 列. 于是 $\{g_m + f_2\} \subset \mathcal{D}(R)$, 而

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (g_m + f_2) = f_1 + f_2 = f$$

且 $\{M(g_m + f_2)\}$ 是 Cauchy 列, 故 $f \in \mathcal{D}(\bar{R})$, 所以 $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(\bar{R})$.

\Leftarrow 设 R 本质自伴, 下面来证明 $H = \bar{R}$, 这样由以上定理的证明便知问题 (P) 适定.

(1) $\bar{R} \subset H$.

设 $f \in \mathcal{D}(\bar{R})$, 存在 $\{f_m\} \subset \mathcal{D}(R)$ 使得 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$, 而 $\lim_{m \rightarrow \infty} Rf_m = \bar{R}f$, 因为 $\bar{R} \subset T_1(M)$, 此即 $\lim_{m \rightarrow \infty} Mf_m = Mf$. 这样, $\{f_m\}$ 在 Hilbert 空间 $(\mathcal{D}(T_1(M)), (\cdot, \cdot)_1)$ 中收敛到 f . 由于 $D^k g(a), k = 0, 1, \dots, 2n-1$ 都是它上面的连续线性泛函, 所以由 S 是闭的得

$$\sigma f = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma f_m \in S, \quad \mathbf{C}^{2n} \text{ 中的收敛.}$$

这样便有 $f \in \mathcal{D}(H)$, 故 $\bar{R} \subset H$.

(2) $H \subset \bar{R}$.

只需证明 $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(\bar{R})$. 设 $f \in \mathcal{D}(H)$, 对任何 $h \in \mathcal{D}(R)$, 因为 $\text{supp} h$ 紧, 由 Green 公式,

$$\begin{aligned} (Rh, f) &= (Mh, f) = (h, Mf) + [h, f]_a^\infty = (h, Mf) - [h, f](a) \\ &= (h, Mf) - (F(a)\sigma h, \sigma f) = (h, Mf), \end{aligned}$$

这表示 $f \in \mathcal{D}(R^*)$, 但是 $R^* = \bar{R}^* = \bar{R}$, 故得 $f \in \mathcal{D}(\bar{R})$.

1.3 对称微分算子的亏指数与自伴延拓

设 M 是区间 I 上的对称正则微分算式, 则对任何 $f, g \in C_0^\infty(\overset{\circ}{I})$, 由 Green 公式有

$$(Mf, g) = (f, Mg),$$

即

$$(T_0(M)f, g) = (f, T_0(M)g),$$

取极限便知

$$(T_0(M)f, g) = (f, T_0(M)g), \quad f, g \in \mathcal{D}(T_0(M)),$$

所以 $T_0(M)$ 是对称算子. 当 I 是有限区间时,

$$My = iy \text{ 和 } My = -iy$$

的解都是平方可积的, 所以 $d_+ - d_- = M$ 的阶数, 这时 $T_0(M)$ 必有自伴延拓, 它的自伴延拓也比较容易构造.

引理 1.3.1 设 M 是 $[a, b]$ 上的 n 阶正则微分算式, 对任意一组数 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, 存在 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$, 使得

$$\sigma f(a) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \sigma f(b) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

证明 取 $h_1, h_2 \in C^\infty$, 使得

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{3a+b}{4}, \\ 0, & x \geq \frac{a+b}{2}, \end{cases} \quad h_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{a+b}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{a+3b}{4}. \end{cases}$$

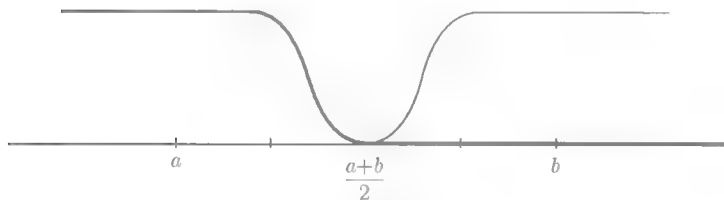


图 1.8

存在 n 阶多项式 p_1, p_2 , 使得

$$p_1(a) = a_1, \quad p_1'(a) = a_2, \quad \dots, \quad p_1^{(n-1)}(a) = a_n,$$

$$p_2(b) = b_1, \quad p_2'(b) = b_2, \quad \dots, \quad p_2^{(n-1)}(b) = b_n,$$

令 $f = h_1 p_1 + h_2 p_2$ 即可.

定理 1.3.1 设 M 是 $[a, b]$ 上 n 阶对称正则微分算式, 则 \mathcal{D} 是 $T_0(M)$ 的某个自伴延拓 T 的定义域的充分必要条件是存在 $n \times n$ 矩阵 $A = (\alpha_{jk}), B = (\beta_{jk})$, 使得 $\text{rank}(A \ B) = n$ 且

$$AF(a)^{-1}A^* = BF(b)^{-1}B^*,$$

而

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \left| \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} f^{(k-1)}(a) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} f^{(k-1)}(b) = 0, j = 1, \dots, n \right. \right\}.$$

证明 \rightarrow 设 \mathcal{D} 是 $T_0(M)$ 的某个自伴延拓 T 的定义域, 则

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \langle f, f_j \rangle = 0, j = 1, \dots, n\},$$

其中, $\{f_1, \dots, f_n\}$ 是 $\mathcal{D}(T_1(M))$ 中模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关的一组元素, 满足

$$\langle f_j, f_k \rangle = 0, \quad j, k = 1, \dots, n,$$

而

$$\langle f, f_j \rangle = [f, f_j]_a^b = (\mathbf{F}(b)\sigma f(b), \sigma f_j(b)) - (\mathbf{F}(a)\sigma f(a), \sigma f_j(a)),$$

$$\sigma f = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

令

$$U = (\sigma f_1, \dots, \sigma f_n) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \dots & f'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

则

$$U^* = \begin{pmatrix} \overline{f_1} & \overline{f'_1} & \dots & \overline{f_1^{(n-1)}} \\ \overline{f_2} & \overline{f'_2} & \dots & \overline{f_2^{(n-1)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{f_n} & \overline{f'_n} & \dots & \overline{f_n^{(n-1)}} \end{pmatrix},$$

于是 $\langle f, f_j \rangle = 0, j = 1, \dots, n$, 可合并写成

$$U^*(b)\mathbf{F}(b)\sigma f(b) - U^*(a)\mathbf{F}(a)\sigma f(a) = 0.$$

记

$$B = U^*(b)\mathbf{F}(b), \quad A = -U^*(a)\mathbf{F}(a),$$

则有

$$A\sigma f(a) + B\sigma f(b) = 0,$$

可以看出来这就是定理中的边条件, 剩下来要验证 A, B 满足条件! 因为

$$\langle f_k, f_j \rangle = 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, n,$$

所以

$$A\sigma f_k(a) + B\sigma f_k(b) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

即

$$AU(a) + BU(b) = 0$$

或

$$U^*(b)F(b)U(b) = U^*(a)F(a)U(a),$$

于是

$$\begin{aligned} AF(a)^{-1}A^* &= -U^*(a)F(a)F(a)^{-1}(-F(a)^*U(a)) \\ &= U^*(a)F(a)^*U(a) \\ &\quad - U^*(a)F(a)U(a) \\ &= -U^*(b)F(b)U(b) \\ &= U^*(b)F(b)F(b)^{-1}(U^*(b)F(b))^* \\ &= BF(b)^{-1}B^*. \end{aligned}$$

下证 $\text{rank}(A \ B) = n$.

假若不然, 则存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 不全为零, 使得 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(A \ B) = 0$, 即 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} -U(a)^*F(a) & U(b)^*F(b) \end{pmatrix} = 0$. 所以

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)U(a)^*F(a) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)U(b)^*F(b) = 0.$$

由于 $F(a), F(b)$ 非退化, 故

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)U(a)^* = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)U(b)^* = 0,$$

即

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \overline{f_j^{(k)}(a)} = 0, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \overline{f_j^{(k)}(b)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

这表示

$$\overline{\alpha_1}f_1 + \dots + \overline{\alpha_n}f_n \in \mathcal{D}(T_0(M)),$$

与 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关矛盾!

\Leftarrow 设

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid A\sigma f(a) + B\sigma f(b) = 0\},$$

$$AF(a)^{-1}A^* = BF(b)^{-1}B^*, \quad \text{rank}(A \ B) = n,$$

要找出 $\mathcal{D}(T_1(M))$ 上 n 个模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关的函数 $\{f_1, \dots, f_n\}$, 满足

$$\langle f_j, f_k \rangle = 0, \quad j, k = 1, \dots, n,$$

使得

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \langle f, f_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

对比前面的证明, 令

$$U(a) = (-AF(a)^{-1})^* = -(F(a)^{-1})^* A^* = -(F(a)^*)^{-1} A^* = F(a)^{-1} A^*,$$

$$U(b) = (BF(b)^{-1})^* = (F(b)^{-1})^* B^* = -F(b)^{-1} B^*.$$

以 $U_j(a), U_j(b)$ 分别表示 $U(a), U(b)$ 的第 j 列 (它们应当是 f_j 的边值 $\sigma f_j(a)$ 与 $\sigma f_j(b)$). 由引理 1.3.1 存在 $f_j \in \mathcal{D}(T_1(M))$, 使得

$$\sigma f_j(a) = U_j(a), \quad \sigma f_j(b) = U_j(b),$$

于是由

$$A\sigma f(a) + B\sigma f(b) = 0$$

得

$$-U(a)^* F(a) \sigma f(a) + U(b)^* F(b) \sigma f(b) = 0,$$

$$U(b)^* F(b) \sigma f(b) - U(a)^* F(a) \sigma f(a) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \overline{U_1(b)}^t \\ \vdots \\ \overline{U_n(b)}^t \end{pmatrix} F(b) \sigma f(b) - \begin{pmatrix} \overline{U_1(a)}^t \\ \vdots \\ \overline{U_n(a)}^t \end{pmatrix} F(a) \sigma f(a) = 0,$$

$$\overline{U_j(b)}^t F(b) \sigma f(b) - \overline{U_j(a)}^t F(a) \sigma f(a) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(F(b) \sigma f(b), U_j(b)) - (F(a) \sigma f(a), U_j(a)) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(F(b) \sigma f(b), \sigma f_j(b)) - (F(a) \sigma f(a), \sigma f_j(a)) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

此即

$$\langle f, f_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

剩下来要验证 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 满足所列的条件.

(1) $\{f_1, \dots, f_n\}$ 模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关.

若不然, 设它们模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性相关, 即有分解式

$$f_j = f_{j0} + \psi_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$f_{j0} \in \mathcal{D}(T_0(M)), \quad \psi_j \in K_+ + K_-$$

且存在不全为零的数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 使得

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \psi_j = 0,$$

即

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_{j0} \in \mathcal{D}(T_0(M)).$$

于是

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j^{(k)}(a) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j^{(k)}(b) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

即

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} f_1(a) & f_2(a) & \cdots & f_n(a) \\ f'_1(a) & f'_2(a) & \cdots & f'_n(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(a) & f_2^{(n-1)}(a) & \cdots & f_n^{(n-1)}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(b) & f_2(b) & \cdots & f_n(b) \\ f'_1(b) & f'_2(b) & \cdots & f'_n(b) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(b) & f_2^{(n-1)}(b) & \cdots & f_n^{(n-1)}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

或

$$\begin{pmatrix} U(a) \\ U(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

由 $U(a), U(b)$ 的定义可得

$$\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0,$$

$$(\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) (A \ B) = 0,$$

这与 $\text{rank}(A \ B) = n$ 矛盾!

$$(2) \langle f_j, f_k \rangle = 0, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

由于

$$A F(a)^{-1} A^* = B F(b)^{-1} B^*,$$

所以

$$AU(a) = -BU(b),$$

$$BU(b) + AU(a) = 0.$$

于是

$$BU_j(b) + AU_j(a) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

即

$$B\sigma f_j(b) + A\sigma f_j(a) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

所以 $\langle f_j, f_k \rangle = 0, j, k = 1, \dots, n$.

特别的, 对于 Sturm-Liouville 算式

$$M = -DpD + q, \quad x \in [a, b],$$

有

推论 1.3.1 设

$$M = -DpD + q, \quad p, q \text{ 是实函数, } x \in [a, b],$$

则 $T_0(M)$ 的自伴延拓的定义域为

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid p(b)(\beta'_i f'(b) - \beta_i f(b)) - p(a)(\alpha'_i f'(a) - \alpha_i f(a)) = 0, \quad i = 1, 2\},$$

其中, $(\alpha_i, \alpha'_i, \beta_i, \beta'_i), i = 1, 2$ 满足

$$(1) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & \beta_1 & \beta'_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \beta_2 & \beta'_2 \end{pmatrix} = 2;$$

$$(2) p(b)(\overline{\beta'_i} \beta_j - \overline{\beta_i} \beta'_j) - p(a)(\overline{\alpha'_i} \alpha_j - \overline{\alpha_i} \alpha'_j) = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

如果 $\alpha_i, \alpha'_i, \beta_i, \beta'_i$ 是实数, 则条件 (2) 可简化为

$$p(a) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 \end{vmatrix} = p(b) \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta'_1 \\ \beta_2 & \beta'_2 \end{vmatrix}.$$

证明 由于

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & -p(x) \\ p(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 p(a) & -\alpha'_1 p(a) \\ \alpha_2 p(a) & -\alpha'_2 p(a) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\beta_1 p(b) & \beta'_1 p(b) \\ -\beta_2 p(b) & \beta'_2 p(b) \end{pmatrix},$$

由条件 (1), $\operatorname{rank}(A \quad B) = 2$. 其次

$$\begin{aligned}
AF(a)^{-1}A^* &= \begin{pmatrix} \alpha_1 p(a) & -\alpha'_1 p(a) \\ \alpha_2 p(a) & -\alpha'_2 p(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p(a)} \\ -\frac{1}{p(a)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} p(a) & \overline{\alpha_2} p(a) \\ -\overline{\alpha'_1} p(a) & -\overline{\alpha'_2} p(a) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha_1 \\ \alpha'_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} p(a) & \overline{\alpha_2} p(a) \\ -\overline{\alpha'_1} p(a) & -\overline{\alpha'_2} p(a) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p(a)(\overline{\alpha_1} \alpha'_1 - \overline{\alpha'_1} \alpha_1) & p(a)(\overline{\alpha_2} \alpha'_1 - \overline{\alpha'_2} \alpha_1) \\ p(a)(\overline{\alpha_1} \alpha'_2 - \overline{\alpha'_1} \alpha_2) & p(a)(\overline{\alpha_2} \alpha'_2 - \overline{\alpha'_2} \alpha_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

同样

$$BF(b)^{-1}B^* = \begin{pmatrix} p(b)(\overline{\beta_1} \beta'_1 - \overline{\beta'_1} \beta_1) & p(b)(\overline{\beta_2} \beta'_1 - \overline{\beta'_2} \beta_1) \\ p(b)(\overline{\beta_1} \beta'_2 - \overline{\beta'_1} \beta_2) & p(b)(\overline{\beta_2} \beta'_2 - \overline{\beta'_2} \beta_2) \end{pmatrix},$$

由条件 (2),

$$AF(a)^{-1}A^* = BF(b)^{-1}B^*,$$

于是结论由定理 1.3.1 可得.

一类简单的边条件是这样的 每个边条件只含某一个端点的函数值与导数值, 这样的边条件称为分离型的边条件. 于是有

$$\beta_1 = \beta'_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha'_2 = 0.$$

而 α_1, α'_1 不同时为 0, β_2, β'_2 不同时为 0. 这样

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \beta'_2 \end{pmatrix} = 2$$

条件 (1) 成立.

至于条件 (2), 当 $i \neq j$ 时, 显然满足. 而当 $i = j = 1$ 时,

$$-p(a)(\overline{\alpha'_1} \alpha_1 - \overline{\alpha_1} \alpha'_1) = 0;$$

当 $i = j = 2$ 时,

$$p(b)(\overline{\beta'_2} \beta_2 - \overline{\beta_2} \beta'_2) = 0.$$

因为 $p(a)p(b) \neq 0$, 故

$$\alpha_1 \overline{\alpha'_1} = \overline{\alpha_1} \alpha'_1, \quad \beta_2 \overline{\beta'_2} = \overline{\beta_2} \beta'_2,$$

即 $\alpha_1 \overline{\alpha'_1}, \beta_2 \overline{\beta'_2}$ 是实的. 这时边条件变成

$$\begin{cases} \alpha'_1 f'(a) - \alpha_1 f(a) = 0, \\ \beta'_2 f'(b) - \beta_2 f(b) = 0, \end{cases}$$

如果 $\alpha_1 = a_1 + ib_1, \alpha'_1 = a_2 + ib_2$, 则

$$0 = \operatorname{Im} \alpha_1 \overline{\alpha'_1} = \operatorname{Im}(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) = -a_1 b_2 + a_2 b_1 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

所以

$$\alpha'_1 = \tau \alpha_1, \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

于是第一个边条件变成

$$\tau f'(a) - f(a) = 0, \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

因此, 一般分离型边条件为

$$\begin{cases} f(a) \cos \alpha - f'(a) \sin \alpha = 0, \\ f(b) \cos \beta - f'(b) \sin \beta = 0, \end{cases}$$

其中, α, β 是实数. 区别于分离型边条件, 一般的边条件称为混合型边条件. 例如, 取

$$\alpha'_1 = \beta'_1 = 0, \quad \alpha_2 - \beta_2 = 0,$$

则

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta'_2 \end{pmatrix} = 2,$$

条件 (1) 成立, 至于条件 (2), 当 $i = j = 1$ 和 $i = j = 2$ 时, 显然成立. 而当 $i \neq j$ 时,

$$-p(b) \overline{\beta_1} \beta'_2 + p(a) = 0,$$

所以

$$\overline{\beta_1} \beta'_2 = \frac{p(a)}{p(b)}.$$

这时边条件是

$$\begin{cases} -p(b) \beta_1 f(b) + p(a) f(a) = 0, \\ p(b) \beta'_2 f'(b) - p(a) f'(a) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(a) = \beta_1 \frac{p(b)}{p(a)} f(b), \\ f'(a) = \beta'_2 \frac{p(b)}{p(a)} f'(b). \end{cases}$$

取 $\beta_1 = \frac{p(a)}{p(b)} \gamma, \beta'_2 = \frac{p(a)}{p(b)} \delta$, 则得

$$\begin{cases} f(a) = \gamma f(b), \\ f'(a) = \delta f'(b). \end{cases}$$

由 $\overline{\beta_1}\beta'_2 = \frac{p(a)}{p(b)}$ 得

$$\overline{\gamma}\delta \left(\frac{p(a)}{p(b)} \right)^2 = \left(\frac{p(a)}{p(b)} \right), \quad \text{即} \quad \overline{\gamma}\delta = \frac{p(b)}{p(a)}.$$

推论 1.3.1 里的第 2 个条件实际上是以下 3 个:

$$\begin{cases} p(b)(\overline{\beta'_1}\beta_1 - \overline{\beta_1}\beta'_1) = p(a)(\overline{\alpha'_1}\alpha_1 - \overline{\alpha_1}\alpha'_1), \\ p(b)(\overline{\beta'_2}\beta_2 - \overline{\beta_2}\beta'_2) = p(a)(\overline{\alpha'_2}\alpha_2 - \overline{\alpha_2}\alpha'_2), \\ p(b)(\overline{\beta'_1}\beta_2 - \overline{\beta_1}\beta'_2) = p(a)(\overline{\alpha'_1}\alpha_2 - \overline{\alpha_1}\alpha'_2), \end{cases}$$

第 4 个

$$p(b)(\overline{\beta_2}\beta_1 - \overline{\beta_1}\beta'_2) = p(a)(\overline{\alpha'_2}\alpha_1 - \overline{\alpha_2}\alpha'_1)$$

是第 3 个取共轭再加负号的结果. 如果 $\beta_1, \beta'_1, \beta_2, \beta'_2, \alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2$ 都是实的, 则头 2 个条件自然满足, 这时第 3 个条件变成

$$p(b) \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{vmatrix} = p(a) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 \end{vmatrix},$$

当

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 \end{vmatrix} = 0$$

时, 得到分离型的边条件

$$\begin{cases} \alpha f'(a) - \beta f(a) = 0, \\ \gamma f'(b) - \delta f(b) = 0. \end{cases}$$

当 I 是无限区间时, 通过 Kodaira 公式 (见 3.11 节), 可以只考虑 $[a, \infty)$ 的情形.

(1) 如果 M 是实对称正则微分算式, 显然

$$My = iy \text{ 和 } My = -iy$$

具有相同数目的平方可积解, 因而 $d_+ = d_-$, 且由定理 1.2.3

$$\frac{M \text{ 阶数}}{2} \leq d_+ = d_- \leq M \text{ 的阶数},$$

这时 $T_0(M)$ 有自伴延拓. Glazman 证明 (YMH 40(1950), 102~135), 给定 $I = [a, \infty)$ 和 $\text{order } M = 2n$, 适当选取微分算式 M , 可以使得 $d_+(M) = d_-(M)$ 取 n 和 $2n$ 之间的一切自然数.

(2) 如果 M 是复对称正则微分算式, 情况较复杂, 这时 $T_0(M)$ 就不一定总有自伴延拓了.

例 1.3.1 $M = iD$, $My = \pm iy$, $y = e^{\pm x}$.

(1) $I = [0, \infty)$.

$d_+ = 0, d_- = 1$, $T_0(M)$ 没有自伴延拓.

(2) $I = (-\infty, \infty)$.

$d_+ = d_- = 0$, $T_0(M)$ 是自伴算子.

第2章 常型自伴微分算子的谱论

考虑有限区间 $[a, b]$ 上由对称正则微分算式所生成的自伴微分算子的谱和谱分解问题. 先讨论特殊的二阶 Sturm-Liouville 算子, 这是在数学物理中常碰到的微分算子, 然后再讨论一般情形.

$$M = -DpD + q, \quad x \in [a, b].$$

记 $f = p^{\frac{1}{2}}$, 这是 $[a, b]$ 上正的可微函数, 作 Liouville 变换

$$\begin{cases} y = fu \text{ 或 } u = \frac{y}{f}, \\ t = \frac{1}{k} \int_a^x \frac{d\tau}{\sqrt{p(\tau)}}, \end{cases}$$

适当选取常数 k , 可以使得 $x \in [a, b] \rightarrow t \in [0, \pi]$. 因为

$$\begin{aligned} Du &= \left(\frac{y}{f}\right)' \frac{dt}{dx} = \frac{y'f - yf'}{f^2} \frac{1}{k} \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}, \\ pDu &= \frac{p^{\frac{1}{2}}}{k} \frac{y'f - yf'}{f^2} = \frac{1}{k} (y'f - yf'), \\ DpDu &= \frac{1}{k} (y'f - yf')' \frac{1}{k} \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{k^2} \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} (y''f + y'f' - y'f' - yf'') \\ &\quad - \frac{1}{k^2 p^{\frac{1}{2}}} (y''f - yf''). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} Mu = -DpDu + qu &= -\frac{1}{k^2 p^{\frac{1}{2}}} (y''f - yf'') + \frac{qy}{f} \\ &\quad - \frac{1}{k^2 f} y'' + \left(\frac{q}{f} + \frac{f''}{k^2 f^2}\right) y \\ &= -\frac{1}{k^2 f} \left(-y'' + \left(k^2 q + \frac{f''}{f}\right) y\right) = \frac{1}{k^2 f} M_1 y, \end{aligned}$$

其中, $M_1 y = -y'' + \left(k^2 q + \frac{f''}{f}\right) y, t \in [0, \pi]$. 因此可以考虑更简单的 Titchmarsh 算子

$$-D^2 + q, \quad x \in [0, \pi], \quad \text{其中, } q \in C[0, \pi].$$

设 T 是 $T_0(M)$ 的一个具有分离型边条件的自伴延拓, 即

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) | f(0) \cos \alpha + f'(0) \sin \alpha = 0, \\ f(\pi) \cos \beta + f'(\pi) \sin \beta = 0\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

要问

(1) $\sigma(T) = ?$

(2) T 的谱分解是什么?

古典的结果是

$$\sigma(T) = \sigma_p(T),$$

T 的规范化特征函数组是 $L^2[a, b]$ 的规范正交基.

2.1 特征值与特征函数的渐近式

Liouville 通过求微分方程解的渐近公式得到 T 有可数个特征值 (1836, 1837).

定理 2.1.1 对任意的 $\alpha \in \mathbf{R}$, Cauchy 问题

$$\begin{cases} -y'' + qy = \lambda y, \\ y(0, \lambda) = \sin \alpha, \\ y'(0, \lambda) = -\cos \alpha \end{cases}$$

存在唯一的解 $\varphi(x, \lambda)$. 对每个固定的 $x \in [0, \pi]$, $\varphi(x, \lambda)$ 是 λ 的整函数.

证明 令

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = (q - \lambda)y, \end{cases}$$

则初始条件变成

$$\begin{cases} y(0) = \sin \alpha, \\ z(0) = -\cos \alpha. \end{cases}$$

化成积分方程组得

$$\begin{cases} y(x) = \sin \alpha + \int_0^x z(t) dt, \\ z(x) = -\cos \alpha + \int_0^x (q(t) - \lambda)y(t) dt. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} y(x) &= \sin \alpha - x \cos \alpha + \int_0^x dt \int_0^t (q(\tau) - \lambda)y(\tau) d\tau \\ &= \sin \alpha - x \cos \alpha + \int_0^x d\tau \int_\tau^x (q(\tau) - \lambda)y(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

即

$$y(x) = \sin \alpha - x \cos \alpha + \int_0^x (q(\tau) - \lambda)(x - \tau)y(\tau) d\tau.$$

用逐次逼近法解此积分方程, 取

$$\varphi_0(x, \lambda) = \sin \alpha - x \cos \alpha,$$

令

$$\varphi_n(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x (q(t) - \lambda)(x - t)\varphi_{n-1}(t, \lambda) dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

讨论收敛性, 设

$$\sup_{0 \leq x \leq \pi} |q(x)| \leq L, \quad |\lambda| \leq N, \quad \sup_{0 \leq x \leq \pi} |\varphi_0(x, \lambda)| \leq K,$$

那么

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x, \lambda) - \varphi_0(x, \lambda)| &= \left| \int_0^x (q(t) - \lambda)(x - t)\varphi_0(t, \lambda) dt \right| \leq \int_0^x K(L + N)(x - t) dt \\ &= K(L + N) \left(-\frac{1}{2}(x - t)^2 \right) \Big|_0^x = \frac{1}{2}K(L + N)x^2, \\ |\varphi_2(x, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)| &= \left| \int_0^x (q(t) - \lambda)(x - t)(\varphi_1(t, \lambda) - \varphi_0(t, \lambda)) dt \right| \\ &\leq (L + N)\pi \int_0^x |\varphi_1(t, \lambda) - \varphi_0(t, \lambda)| dt \\ &\leq \frac{1}{2}K(L + N)^2\pi \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3!}K(L + N)^2\pi x^3. \end{aligned}$$

一般地, 由

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)| &\leq \left| \int_0^x (q(t) - \lambda)(x - t)(\varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)) dt \right| \\ &\leq (L + N)\pi \int_0^x |\varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)| dt, \end{aligned}$$

可得

$$|\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)| \leq \frac{1}{(n+1)!} K(L + N)^n \pi^{n-1} x^{n+1}.$$

于是

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda))$$

在 $|\lambda| \leq N$ 和 $x \in [0, \pi]$ 上一致收敛. 而

$$\varphi'_n(x, \lambda) - \varphi'_{n-1}(x, \lambda) = \int_0^x (q(t) - \lambda) (\varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)) dt, \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$\varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda) = (q(x) - \lambda) (\varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda)), \quad n = 2, 3, \dots.$$

级数

$$\begin{aligned} & -\cos \alpha + \int_0^x (q(t) - \lambda) \varphi_0(t, \lambda) dt + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^x (q(t) - \lambda) (\varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)) dt, \\ & (q(x) - \lambda) \varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} (q(x) - \lambda) (\varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda)) \end{aligned}$$

也都在 $x \in [0, \pi]$ 上一致收敛, 所以可以逐项微分

$$\begin{aligned} \varphi''(x, \lambda) &= (q(x) - \lambda) \left(\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} (\varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda)) \right) \\ &\quad - (q(x) - \lambda) \left(\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)) \right) \\ &= (q(x) - \lambda) \varphi(x, \lambda), \end{aligned}$$

即 $\varphi(x, \lambda)$ 满足微分方程, 此外

$$\varphi(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi'(0, \lambda) = -\cos \alpha,$$

所以 $\varphi(x, \lambda)$ 是 Cauchy 问题的解. 由于每一个 $\varphi_n(x, \lambda)$ 都是 λ 的整函数, 所以 $\varphi(x, \lambda)$ 作为整函数一致收敛的极限也是 λ 的整函数.

令

$$\begin{cases} \cot \alpha = -h, \\ \cot \beta = H, \end{cases}$$

假设 $h, H \neq \infty$, 则边条件变成

$$\begin{cases} f'(0) - hf(0) = 0, \\ f'(\pi) + Hf(\pi) = 0. \end{cases}$$

设 $\varphi(x, \lambda)$ 和 $\psi(x, \lambda)$ 分别满足

$$\begin{cases} My - \lambda y, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = h, \end{cases} \quad \begin{cases} My = \lambda y, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

它们组成了方程 $My - \lambda y$ 的基本解组且 $\varphi(x, \lambda)$ 满足第 1 个边条件.

引理 2.1.1 记 $\lambda = s^2$, 则

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau,$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau.$$

证明 方程

$$y'' + s^2 y = qy$$

的齐次方程的通解是

$$y = c_1 \cos sx + c_2 \sin sx,$$

利用常数变易法

$$c'_1 \cos sx + c'_2 \sin sx = 0,$$

$$y' = -sc_1 \sin sx + sc_2 \cos sx,$$

$$y'' = -sc'_1 \sin sx + sc'_2 \cos sx - s^2 c_1 \cos sx - s^2 c_2 \sin sx$$

$$= -sc'_1 \sin sx + sc'_2 \cos sx - s^2 y,$$

代入方程得

$$-sc'_1 \sin sx + sc'_2 \cos sx = qy,$$

$$c'_1 s \sin sx - c'_2 s \cos sx = -qy,$$

联立起来, 解得

$$c'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin sx \\ -qy & s \cos sx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos sx & \sin sx \\ s \sin sx & -s \cos sx \end{vmatrix}} = -\frac{\sin sx}{s} qy,$$

$$c'_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos sx & 0 \\ s \sin sx & -qy \end{vmatrix}}{-s} = \frac{\cos sx}{s} qy.$$

于是

$$c_1 = -\int_0^x \frac{\sin s\tau}{s} q(\tau) y(\tau) d\tau + \alpha_1,$$

$$c_2 = \int_0^x \frac{\cos s\tau}{s} q(\tau) y(\tau) d\tau + \alpha_2,$$

故

$$\begin{aligned} y &= \alpha_1 \cos sx + \alpha_2 \sin sx + \int_0^x \frac{-\sin s\tau \cos sx + \cos s\tau \sin sx}{s} qy d\tau \\ &= \alpha_1 \cos sx + \alpha_2 \sin sx + \int_0^x \frac{\sin s(x-\tau)}{s} qy d\tau. \end{aligned}$$

如果 $y(0) = 1, y'(0) = h$, 则

$$\alpha_1 = 1, \quad s\alpha_2 = h, \quad \alpha_2 = \frac{h}{s},$$

所以 $\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-\tau)q(\tau)\varphi(\tau, \lambda)d\tau$. 同理, 可得关于 ψ 的方程.

引理 2.1.2 记 $s = \sigma + it$, 则存在 $s_0 > 0$, 使得当 $|s| > s_0$ 时有

$$\varphi(x, \lambda) = O\left(e^{|t|x}\right), \quad \psi(x, \lambda) = O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|}\right),$$

或者更准确些

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|}\right), \quad \psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|^2}\right),$$

这些估计式对 $x \in [0, \pi]$ 一致成立.

证明 令

$$\varphi(x, \lambda) = e^{|t|x}F(x),$$

则

$$F(x) = \left(\cos sx + \frac{h}{s} \sin sx\right)e^{-|t|x} + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-\tau)q(\tau)e^{-|t|(x-\tau)}F(\tau)d\tau.$$

设 $\mu = \max_{0 \leq x \leq \pi} |F(x)|$, 则^①

$$\mu \leq 1 + \frac{|h|}{|s|} + \frac{\mu}{|s|} \int_0^\pi |q(\tau)| d\tau,$$

① 由于 s 是复的, 所以对 $\cos sx, \sin sx$ 估计时要小心! 因为

$$|\cos sx| = \left| \frac{e^{isx} + e^{-isx}}{2} \right| = \frac{|e^{-tx}e^{i\sigma x} + e^{tx}e^{-i\sigma x}|}{2} \leq \frac{e^{-tx} + e^{tx}}{2} \leq e^{|t|x},$$

$$|\sin sx| = \left| \frac{e^{isx} - e^{-isx}}{2i} \right| \leq e^{|t|x},$$

所以 $|(\cos sx)e^{-|t|x}|, |(\sin sx)e^{-|t|x}|, |(\sin s(x-\tau))e^{-|t|(x-\tau)}| \leq 1$.

所以

$$\mu \leq \frac{1 + \frac{|h|}{|s|}}{1 + \frac{1}{|s|} \int_0^\pi |q(\tau)| d\tau}, \quad \text{与 } x \text{ 无关!}$$

取 $s_0 = \int_0^\pi |q(\tau)| d\tau > 0$. 于是当 $|s| > s_0$ 时, μ 小于一个正常数, 因而

$$\varphi(x, \lambda) = O(e^{t|x}).$$

估计式对 $x \in [0, \pi]$ 一致成立. 利用这个估计式, 进一步得到

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-\tau) q(\tau) O(e^{t|\tau|}) d\tau.$$

因为

$$\frac{\left| \frac{h}{s} \sin sx \right|}{\frac{e^{t|x}}{|s|}} = \frac{|h| |\sin sx|}{e^{t|x}} \leq \frac{|h| e^{t|x}}{e^{t|x}} = |h|, \quad x \in [0, \pi],$$

而

$$|\sin s(x-\tau)| \leq \frac{e^{-t(x-\tau)} + e^{t(x-\tau)}}{2} \leq e^{t|(x-\tau)|},$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \frac{\frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-\tau) q(\tau) O(e^{t|\tau|}) d\tau}{e^{t|x}/|s|} \right| &\leq \frac{1}{e^{t|x}} \int_0^x \frac{A e^{t|\tau|}}{2} (e^{-t(x-\tau)} + e^{t(x-\tau)}) d\tau \\ &\leq \frac{A}{e^{t|x}} \int_0^x e^{t|\tau|} e^{t|(x-\tau)|} d\tau \leq A\pi, \quad x \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

于是

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O\left(\frac{e^{t|x}}{|s|}\right),$$

估计式对 $x \in [0, \pi]$ 一致成立. 同理, 可得关于 ψ 的估计式.

下面来推导特征值和特征函数的渐近估计. 从这些估计式可以得到存在着可数个特征值的结论. 特征值是实的, 而由 Sturm 的理论 (见定理 2.2.3), 负特征值只有有限个, 故假定 $\lambda > 0$. 如果 $\lambda > 0$, 则由 $\lambda = s^2$, $\text{Im}s = 0$ 得

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

另外由

$$\varphi'(x, \lambda) = -s \sin sx + h \cos sx + \int_0^x \cos s(x - \tau) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau,$$

如果 $A_1\varphi + B_1\psi$ 是对应于 λ 的 T 的特征函数, 则由第 1 个边条件得

$$(A_1\varphi'(0, \lambda) + B_1\psi'(0, \lambda)) - h(A_1\varphi(0, \lambda) + B_1\psi(0, \lambda)) = 0,$$

即 $A_1h + B_1 - A_1h = 0$. 于是 $B_1 = 0$. 因为 $\varphi(x, \lambda)$ 满足第 1 个边条件, 所以若 λ 是特征值, $\varphi(x, \lambda)$ 一定要满足

$$\varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = 0,$$

($\omega(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda)$ 是个不恒为零的整函数, 它最多有可数个零点, 这些零点没有有限的聚点.) 即

$$\begin{aligned} & -s \sin s\pi + h \cos s\pi + \int_0^\pi \cos s(\pi - \tau) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \\ & + H \left(\cos s\pi + \frac{h}{s} \sin s\pi + \frac{1}{s} \int_0^\pi \sin s(\pi - \tau) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \right) = 0, \\ & \sin s\pi \left(-s + \int_0^\pi \sin s\tau q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau + \frac{Hh}{s} + \frac{H}{s} \int_0^\pi \cos s\tau q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \right) \\ & + \cos s\pi \left(h + \int_0^\pi \cos s\tau q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau + H - \frac{H}{s} \int_0^\pi \sin s\tau q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \right) = 0. \end{aligned}$$

把它写成

$$(-s + B) \sin s\pi + A \cos s\pi = 0,$$

其中,

$$\begin{aligned} A &= h + H + \int_0^\pi \left(\cos s\tau - \frac{H}{s} \sin s\tau \right) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau, \\ B &= \frac{Hh}{s} + \int_0^\pi \left(\sin s\tau + \frac{H}{s} \cos s\tau \right) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau. \end{aligned}$$

因为 $\varphi(\tau, \lambda)$ 在 $[0, \pi]$ 上有界, 所以对充分大的 s ,

$$A = h + H + O(1), \quad B = O(1).$$

于是有

$$-s \sin s\pi + (h + H) \cos s\pi + O(1) = 0,$$

即

$$\sin s\pi - \frac{h + H}{s} \cos s\pi + \frac{O(1)}{s} = 0,$$

这样, 对充分大的 s 来说, 这个方程有解, 而且解靠近整数. 所以存在着可数个特征值. 由于

$$\omega'(s) = -\sin s\pi - s\pi \cos s\pi - \pi(h+H)\sin s\pi + O(1),$$

当 s 靠近整数时, 它不等于零, 所以特征值的重数为 1.

来看特征值的渐近估计. 设 $s_n = n + \delta_n$, 则

$$-(n + \delta_n) \sin(n + \delta_n)\pi + (h + H) \cos(n + \delta_n)\pi + O(1) = 0,$$

$$(-1)^{n+1}(n + \delta_n) \sin \delta_n \pi + (-1)^n(h + H) \cos \delta_n \pi + O(1) = 0,$$

$$-(n + \delta_n) \sin \delta_n \pi + (h + H) \cos \delta_n \pi = O(1),$$

所以 $\sin \delta_n \pi = \frac{O(1)}{n + \delta_n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\delta_n \pi = O\left(\frac{1}{n}\right)$, 即 $s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$. 这个渐近估计式还可以进一步改进, 假定 q 有有界的导数, 由引理 2.1.2,

$$\begin{aligned} A &= h + H + \int_0^\pi \left(\cos s\tau - \frac{H}{s} \sin s\tau \right) q(\tau) \left(\cos s\tau + O\left(\frac{1}{s}\right) \right) d\tau \\ &= h + H + \int_0^\pi \cos^2 s\tau q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right) - h + H + \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2s\tau}{2} q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right), \\ B &= \frac{hH}{s} + \int_0^\pi \left(\sin s\tau + \frac{H}{s} \cos s\tau \right) q(\tau) \left(\cos s\tau + O\left(\frac{1}{s}\right) \right) d\tau \\ &= \int_0^\pi \sin s\tau \cos s\tau q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2s\tau q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right), \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos 2s\tau q(\tau) d\tau &= \frac{\sin 2s\tau}{2s} q(\tau) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin 2s\tau}{2s} q'(\tau) d\tau \\ &= \frac{\sin 2s\pi}{2s} q(\pi) - \frac{1}{2s} \int_0^\pi \sin 2s\tau q'(\tau) d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right), \end{aligned}$$

同样

$$\int_0^\pi \sin 2s\tau q(\tau) d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right),$$

所以 $A = h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)$, 其中, $h_1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt$ 且 $B = O\left(\frac{1}{s}\right)$. 于是由

$$(-s + B) \sin s\pi + A \cos s\pi = 0$$

得

$$\left(s + O\left(\frac{1}{s}\right)\right) \sin s\pi = \left(h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right) \cos s\pi,$$

$$\tan s\pi = \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)}{s + O\left(\frac{1}{s}\right)}.$$

令 $s = n + \delta_n$, 得

$$\begin{aligned} \tan \delta_n \pi &= \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{n + O\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{n \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{h + H + h_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{h + H + h_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{h + H + h_1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ s_n &= n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

其中,

$$c = \frac{1}{\pi} \left(h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau \right).$$

(如果 $q \in C^2[0, \pi]$, 则可得 $s_n = n + \frac{c}{n} + \frac{c_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.)

对应的特征函数的渐近公式如何?

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) \left(\cos s\tau + O\left(\frac{1}{s}\right) \right) d\tau \\ &= \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) \cos s\tau q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ &= \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \frac{\sin sx + \sin s(x - 2\tau)}{2} q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ &= \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{\sin sx}{2s} \int_0^x q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right). \end{aligned}$$

这是因为

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin s(x-2\tau)q(\tau) d\tau &= \frac{\cos s(x-2\tau)}{2s} q(\tau) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{\cos s(x-2\tau)}{2s} q'(\tau) d\tau \\ &= \frac{\cos sx}{2s} (q(x)-q(0)) - \int_0^x \frac{\cos s(x-2\tau)}{2s} q'(\tau) d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \varphi(x, \lambda_n) \\ &= \cos\left(n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x + \frac{h}{n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \sin\left(n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x \\ &\quad + \frac{\sin\left(n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x}{2\left(n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \int_0^x q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \cos nx \cos\left(\frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x - \sin nx \sin\left(\frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x \\ &\quad + \frac{h}{n} \frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \left(\sin nx \cos\left(\frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x + \cos nx \sin\left(\frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x \right) \\ &\quad + \frac{\sin nx \cos\left(\frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x + \cos nx \sin\left(\frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x}{2n} \\ &\quad + \frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \int_0^x q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{c}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \sin\left(\frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x &= \frac{c}{n}x + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \cos nx - \frac{cx}{n} \sin nx + \frac{h}{n} \sin nx + \frac{\sin nx}{2n} \int_0^x q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \cos nx + \frac{\beta(x)}{n} \sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

其中,

$$\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau.$$

将 $\varphi_n(x)$ 规范化

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi \varphi_n^2(x) dx = \int_0^\pi \cos^2 nx dx + \frac{1}{n} \int_0^\pi \beta(x) \sin 2nx dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由于

$$\int_0^\pi \beta(x) \sin 2nx dx = -\frac{\cos 2nx}{2n} \beta(x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \beta'(x) \frac{\cos 2nx}{2n} dx = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

故

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi \cos^2 nx dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

这样

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故规范化了的特征函数有渐近式^①

$$\nu_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\cos nx + \frac{\beta(x)}{n} \sin nx \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

① 事实上, 由引理 2.1.2,

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, \lambda_n) &= \cos s_n x + O\left(\frac{1}{s_n}\right) = \cos\left(n + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \cos nx \cos O\left(\frac{1}{n}\right) - \sin nx \sin O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \cos nx \left(1 - 2\sin^2 O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sin nx \sin O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \cos nx \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \sin nx O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \cos nx + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \alpha_n^2 &= \int_0^\pi \varphi_n^2(x, \lambda_n) dx = \int_0^\pi \cos^2 nx dx + 2 \int_0^\pi \cos nx \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) dx + \int_0^\pi O\left(\frac{1}{n^2}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \frac{1}{\alpha_n} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \nu_n(x) &= \frac{1}{\alpha_n} \varphi_n(x, \lambda_n) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(\cos nx + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

假设 $h = \infty, H \neq \infty$ ($h \neq \infty, H = \infty$ 可以用变换 $t = \pi - x$ 化成 $h = \infty, H \neq \infty$ 的情形), 这时边条件变成

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f'(\pi) + Hf(\pi) = 0, \end{cases}$$

$\psi(x, \lambda)$ 满足第 1 个边条件, 所以特征函数一定是 $\psi(x, \lambda)$ 的倍数.

$$\psi'(x, \lambda) = \cos sx + \int_0^x \cos s(x - \tau)q(\tau)\psi(\tau, \lambda)d\tau,$$

代入第 2 个边条件得

$$\begin{aligned} & \cos s\pi + \int_0^\pi \cos s(\pi - \tau)q(\tau)\psi(\tau, \lambda)d\tau \\ & + H \left(\frac{\sin s\pi}{s} + \frac{1}{s} \int_0^\pi \sin s(\pi - \tau)q(\tau)\psi(\tau, \lambda)d\tau \right) = 0, \end{aligned}$$

这就是特征值 λ 需要满足的方程. 它是一个不恒为零的整函数. 可是由引理 2.1.2,

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

故得

$$\cos s\pi + \frac{1}{s} \int_0^\pi \cos s(\pi - \tau) \sin s\tau q(\tau)d\tau + H \frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0. \quad (2.1)$$

于是

$$\cos s\pi = O\left(\frac{1}{s}\right),$$

所以当 s 很大时,

$$s \sim n + \frac{1}{2},$$

存在着无穷多个特征值, 式 (2.1) 左边对 s 求导数, 再让 $s = n + \frac{1}{2}$ 得

$$-\pi \sin s\pi + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \Big|_{s=n+\frac{1}{2}} \neq 0,$$

所以特征值的重数为 1. 为了得到特征值较精确的渐近式, 假定 q 有有界导数, 这时

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos s(\pi - \tau) \sin s\tau q(\tau) d\tau &= \cos s\pi \int_0^\pi q(\tau) \cos s\tau \sin s\tau d\tau + \sin s\pi \int_0^\pi q(\tau) \sin^2 s\tau d\tau \\ &= \frac{\cos s\pi}{2} \int_0^\pi q(\tau) \sin 2s\tau d\tau + \sin s\pi \int_0^\pi q(\tau) \frac{1 - \cos 2s\tau}{2} d\tau \\ &= \frac{\sin s\pi}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right), \end{aligned}$$

于是由式 (2.1), 特征值要满足

$$\cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{s} \left(H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau \right) + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0.$$

设 $s_n = n + \frac{1}{2} + \delta_n$, 则

$$\begin{aligned} \cot \left(n + \frac{1}{2} + \delta_n \right) \pi &= -\frac{H_1}{n + \frac{1}{2} + \delta_n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad H_1 = H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau, \\ -\tan \delta_n \pi &= -\left(\frac{H_1}{n + \frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta_n}{n + \frac{1}{2}}} \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\quad - \frac{H_1}{n + \frac{1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\quad - \frac{H_1}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

于是

$$\tan \delta_n \pi = \frac{H_1}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \delta_n = \frac{H_1}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故得

$$s_n = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

再看特征函数的渐近式, 由引理 2.1.1 与引理 2.1.2,

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda) &= \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) \left(\frac{\sin s\tau}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right) d\tau \\ &= \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right). \end{aligned}$$

于是

$$\psi_n(x) = \psi(x, \lambda_n) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi} \right) x}{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi} \right)} + O \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

而

$$\begin{aligned} \sin \left(n + \frac{1}{2} + \cdots \right) x &= \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \cos O \left(\frac{1}{n} \right) x + \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \sin O \left(\frac{1}{n} \right) x \\ &\quad - \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + O \left(\frac{1}{n} \right) \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x + O \left(\frac{1}{n^2} \right), \\ \frac{1}{n + \frac{1}{2} + \cdots} &= \left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{1 + O \left(\frac{1}{n^2} \right)} \right) = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left(1 + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + O \left(\frac{1}{n^2} \right), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{n + \frac{1}{2}} + O \left(\frac{1}{n^2} \right), \\ \alpha_n^2 &= \int_0^\pi \psi_n^2(x) dx = \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2} \int_0^\pi \sin^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx + O \left(\frac{1}{n^3} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2} \left(1 + O \left(\frac{1}{n} \right) \right), \\ \frac{1}{\alpha_n} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + O \left(\frac{1}{n} \right)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + O \left(\frac{1}{n} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(1 + O \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(n + \frac{1}{2} \right) + O(1), \end{aligned}$$

所以规范化了的特征函数有渐近式

$$\nu_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

假设 $h = \infty, H = \infty$, 边条件变成 $f(0) = f(\pi) = 0$. $\psi(x, \lambda)$ 满足第 1 个边条件, 让它也满足第 2 个边条件得特征值满足的方程

$$\sin s\pi + \int_0^\pi \sin s(\pi - \tau) q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau = 0,$$

由引理 2.1.2 得

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

代入积分得

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin s(\pi - \tau) q(\tau) \left(\frac{\sin s\tau}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right) d\tau \\ &= \frac{1}{s} \sin s\pi \int_0^\pi \sin s\tau \cos s\tau q(\tau) d\tau - \frac{1}{s} \cos s\pi \int_0^\pi \sin^2 s\tau q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ &= \frac{1}{2s} \sin s\pi \int_0^\pi q(\tau) \sin 2s\tau d\tau - \frac{\cos s\pi}{s} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2s\tau}{2} q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ &= -\frac{\cos s\pi}{2s} \int_0^\pi q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right), \end{aligned}$$

故特征值满足的方程是

$$\sin s\pi - \frac{\alpha}{s} \cos s\pi + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau,$$

即

$$\sin s\pi = \left(\frac{\alpha}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right) \cos s\pi = O\left(\frac{1}{s}\right).$$

当 s 很大时, 有

$$s \sim n,$$

因此存在着无穷多个特征值, 对 s 求导数, 再让 $s = n$ 得

$$\pi \cos s\pi + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \Big|_{s=n} \neq 0,$$

这说明特征值重数为 1. 令 $s_n = n + \delta_n$, 则

$$\begin{aligned}
 \tan(n + \delta_n)\pi &= \frac{\alpha}{n + \delta_n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\alpha}{n} \frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &= \frac{\alpha}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\
 \tan \delta_n \pi &= \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\
 \delta_n \pi &= \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \delta_n = \frac{\alpha}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),
 \end{aligned}$$

所以

$$s_n = n + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

其中, $\alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(\tau) d\tau$. 类似地,

$$\begin{aligned}
 \psi_n(x) = \psi(x, \lambda_n) &= \frac{\sin\left(n + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)x}{n + O\left(\frac{1}{n}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\
 \sin\left(n + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)x &= \sin nx \cos O\left(\frac{1}{n}\right)x + \cos nx \sin O\left(\frac{1}{n}\right)x \\
 &= \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right) \cos nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\
 \frac{1}{n + O\left(\frac{1}{n}\right)} - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right) &= \frac{1}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \psi_n(x) &= \frac{\sin nx}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\
 \alpha_n^2 &= \int_0^\pi \psi_n^2(x) dx = \frac{1}{n^2} \int_0^\pi \sin^2 nx dx + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \\
 \frac{1}{\alpha_n} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).
 \end{aligned}$$

故规范化了的特征函数有渐近式

$$\nu_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

从以上的讨论可见, 特征值是整函数的零点.

表 2.1

$h \neq \infty, H \neq \infty$	$h = \infty, H \neq \infty$	$h \neq \infty, H = \infty$	$h = \infty, H = \infty$
$\varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = 0$	$\psi'(\pi, \lambda) + H\psi(\pi, \lambda) = 0$	$\varphi(\pi, \lambda) = 0$	$\psi(\pi, \lambda) = 0$
$s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$	$s_n = n + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$	$s_n = n + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$	$s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$
$\nu_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx$ $+ O\left(\frac{1}{n}\right)$	$\nu_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x$ $+ O\left(\frac{1}{n}\right)$	$\nu_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$ $+ O\left(\frac{1}{n}\right)$	$\nu_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$ $+ O\left(\frac{1}{n}\right)$

因为特征值是实的, 所以这些乃是不恒为零的整函数的实的零点, 由于整函数的零点至多可数, 且零点没有有限的聚点, 故特征值至多可数, 特征值没有有限聚点. 进一步利用了渐近式可得: T 存在可数个特征值, 没有有限聚点, 并且大的特征值是一重的.

2.2 特征函数的零点

Sturm 对特征函数的零点分布作了深入的研究, 从而找到了 T 存在着可数多个特征值的另一个证明 (1836 年). 先看一个简单的例子, 考虑

$$M = -D^2, \quad x \in [0, \pi].$$

设 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid f'(0) = f'(\pi) = 0\},$$

显然 T 的特征值是

$$0, 1, 2^2, \dots, n^2, \dots,$$

对应的特征函数是

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$$

$\cos nx$ 的周期为 $\frac{2\pi}{n}$, 它在 $[0, 2\pi]$ 上有 $2n$ 个零点, 所以在 $[0, \pi]$ 上有 n 个零点. 如果 α, β 是它的两个相邻的零点,

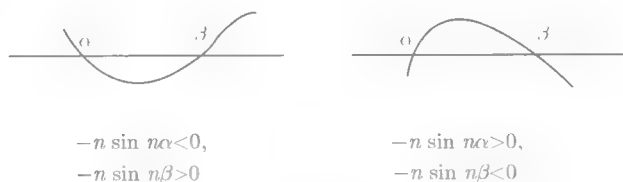


图 2.1

对 $\cos(n+1)x = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x$, 有

$$\cos(n+1)\alpha = -\sin n\alpha \sin \alpha,$$

$$\cos(n+1)\beta = -\sin n\beta \sin \beta,$$

$$\cos(n+1)\alpha \cos(n+1)\beta < 0,$$

所以 α, β 间有 $\cos(n+1)x$ 的一个零点. 如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 $\cos nx$ 的 n 个零点 (按顺序排列), 因为 $\cos n0 = 1, \cos nx$ 在 $[0, \alpha_1]$ 上下降, 于是 $\cos(n+1)\alpha_1 < 0$ ($\cos nx$ 在 α_1 下降, $-n \sin n\alpha_1 < 0$), $\cos(n+1)x$ 在 $(0, \alpha_1)$ 上有一个零点.

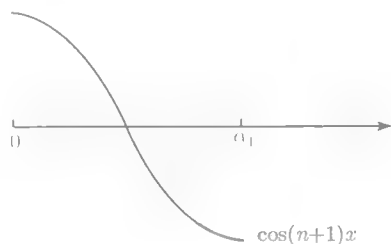


图 2.2

当 n 是偶数时, $\cos(n+1)\alpha_n > 0$, $\cos(n+1)\pi = -1$, $\cos(n+1)x$ 在 (α_n, π) 上有一个零点;



图 2.3

当 n 是奇数时, $\cos(n+1)\alpha_n < 0$, $\cos(n+1)\pi = 1$, $\cos(n+1)x$ 在 (α_n, π) 上有一个零点.

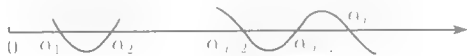


图 2.4

这样便得到下列结论:

- (1) 第 n 个特征函数 $\cos nx$ 在 $[0, \pi]$ 上有 n 个零点;
- (2) 第 $n+1$ 个特征函数 $\cos(n+1)x$ 的零点与第 n 个特征函数 $\cos nx$ 的零点交错出现.

Sturm 证明了这是特征函数具有的一般的性质.

定理 2.2.1 设

- (1) $g(x) < h(x)$, $x \in [a, b]$;
 (2) u, v 是满足微分方程

$$u'' + gu = 0, \quad v'' + hv = 0$$

的非平凡解, 则 u 的两个相邻的零点之间至少有 v 的一个零点.

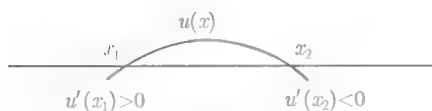


图 2.5

证明 $(u'v - uv')' = u''v - uv'' = (h - g)uv$, 设 x_1, x_2 是 u 的两个相邻的零点, 若 v 在 (x_1, x_2) 上不为零, 不妨假设 u, v 在 (x_1, x_2) 上恒正, 则由

$$(u'v - uv')|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (h - g)uv dx$$

得

$$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) > 0.$$

(由唯一性定理, $u'(x_1), u'(x_2) \neq 0$) 因为

$$v(x_1), v(x_2) \geq 0,$$

所以又有

$$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) \leq 0,$$

矛盾!

推论 2.2.1 设 $g(x) < -m^2 < 0, x \in [a, b]$, 则 $y'' + g(x)y = 0, x \in [a, b]$ 的任何解至多有一个零点 (即解没有振动性质).

证明 因为 $y'' - m^2y = 0$ 的解 $y = e^{mx}$ 没有零点, 所以结论成立.

定理 2.2.2 (比较定理) 设

- (1) $g(x) < h(x), x \in [a, b]$;
 (2) $u(x), v(x)$ 分别满足

$$\begin{cases} u''(x) + g(x)u(x) = 0, \\ u(a) = \sin \alpha, \\ u'(a) = -\cos \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} v''(x) + h(x)v(x) = 0, \\ v(a) = \sin \alpha, \\ v'(a) = -\cos \alpha, \end{cases} \quad x \in [a, b],$$

则若 $u(x)$ 在 $(a, b]$ 上有 m 个零点, $v(x)$ 在 $(a, b]$ 上的零点必不少于 m 个, 且 $v(x)$ 的第 k 个零点小于 $u(x)$ 的第 k 个零点.

证明 (1) 非平凡解的零点是孤立的.

如果 x_0 是不孤立的零点, 则 $u(x_0) = 0$ 且存在 $\{x_n\}$, 使得 $u(x_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. 因此

$$u'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(x_n) - u(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

由唯一性得 $u(x) \equiv 0$, 矛盾!

(2) 由于零点孤立, 在 $(a, b]$ 上存在 $u(x)$ 的最靠近 a 的零点 x_1 . 利用定理 2.2.1 的结论, 只需再证明 v 在 (a, x_1) 上有一个零点即可.

设 $v(x)$ 在 (a, x_1) 上不变号, 不妨假定 $u(x), v(x)$ 在 (a, x_1) 上为正,

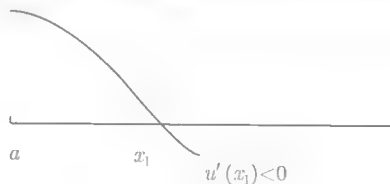


图 2.6

$$\begin{aligned} 0 &< \int_a^{x_1} (h(x) - g(x))u(x)v(x)dx \\ &= \int_a^{x_1} (u'(x)v(x) - u(x)v'(x))'dx \\ &= (u'(x)v(x) - u(x)v'(x))|_a^{x_1} = u'(x_1)v(x_1) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

矛盾!

解的振动性质是二阶 Sturm-Liouville 型微分方程的一个重要性质. 关于这个性质在各个方面的推广:

- (1) 推广到非对称情形;
- (2) 推广到高阶情形;
- (3) 推广到偏微分方程情形;
- (4) 推广到一般的算子以及它与其他分析分支的联系.

参见 Kreith 的讲义 Oscillation Theory, Lecture Notes No.324, 1973, 这方面尚有不少问题有待研究.

下面利用 1926 年 Prüfer 引进的所谓 Prüfer 变换来证明 T 有可数个特征值. 考虑方程

$$-y'' + qy = 0, \quad x \in [a, b], \quad q \text{ 连续}$$

的非平凡解. 则

$$\rho^2(x) = y^2(x) + y'^2(x) \neq 0, \quad x \in [a, b],$$

$$\begin{cases} y(x) = \rho(x) \sin \theta(x), \\ y'(x) = \rho(x) \cos \theta(x). \end{cases}$$

显然, $y(x)$ 的零点就是使 $\theta(x) = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ 的点. 所以应当着重考虑 $\theta(x)$ 的变化. 代入微分方程

$$\begin{cases} -\rho'(x) \cos \theta(x) + \rho(x) \sin \theta(x) \theta'(x) + q(x) \rho(x) \sin \theta(x) = 0, \\ \rho'(x) \sin \theta(x) + \rho(x) \cos \theta(x) \theta'(x) = \rho(x) \cos \theta(x), \end{cases}$$

解出导数

$$\begin{cases} \rho'(x) = q(x) \rho(x) \sin \theta(x) \cos \theta(x) + \rho(x) \sin \theta(x) \cos \theta(x) = \frac{1}{2}(1+q(x))\rho(x) \sin 2\theta(x), \\ \theta'(x) = \frac{1}{\rho(x)}(\rho(x) \cos^2 \theta(x) - q(x) \rho(x) \sin^2 \theta(x)) = \cos^2 \theta(x) - q(x) \sin^2 \theta(x), \end{cases}$$

第 2 个方程是 $\theta(x)$ 的一阶非线性方程,

$$\theta' = \cos^2 \theta - q(x) \sin^2 \theta,$$

右边的函数 $f(x, \theta) = \cos^2 \theta - q(x) \sin^2 \theta$ 连续, 而

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -2 \cos \theta \sin \theta - q(x) 2 \sin \theta \cos \theta = -(q(x) + 1) \sin 2\theta$$

有界, 所以 f 关于 θ 满足 Lipschitz 条件, 故在 $[a, b]$ 上的 Cauchy 问题有唯一的解.

引理 2.2.1 设 θ_1 和 θ_2 分别是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \theta' = \cos^2 \theta - q_1(x) \sin^2 \theta, \\ \theta(a) = \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta' = \cos^2 \theta - q_2(x) \sin^2 \theta, \\ \theta(a) = \beta \end{cases}$$

的解, $\alpha \leq \beta, q_1(x) > q_2(x), x \in [a, b]$, 则

$$\theta_1(x) < \theta_2(x), \quad x \in (a, b].$$

证明 在 $x = a$ 处有 3 种可能.

- (1) $\alpha < \beta$;
- (2) $\alpha = \beta \neq 0(\text{mod } \pi)$;
- (3) $\alpha = \beta = 0(\text{mod } \pi)$.

对于情形 (1), 因为 $\alpha < \beta$, 所以由连续函数的保号性, 易证在 a 的某右邻域 $(a, a + \delta)$ 上, $\theta_1 < \theta_2$;

对于情形 (2), 因为 $\alpha = \beta \neq 0(\text{mod } \pi)$,

$$\theta'_1(a) = \cos^2 \alpha - q_1(a) \sin^2 \alpha < \cos^2 \alpha - q_2(a) \sin^2 \alpha = \cos^2 \beta - q_2(a) \sin^2 \beta = \theta'_2(a),$$

所以存在区间 $(a, a + \delta)$, 使得

$$\theta_1(x) < \theta_2(x), \quad x \in (a, a + \delta).$$

如果 $\theta_1(a+\delta) < \theta_2(a+\delta)$, 还可以用这个方法向右延展开去, 如果 $\theta_1(a+\delta) = \theta_2(a+\delta)$, 设 $\theta_1(a+\delta) = \theta_2(a+\delta) \neq 0(\text{mod}\pi)$, 则

$$\theta'_1(a+\delta) < \theta'_2(a+\delta).$$

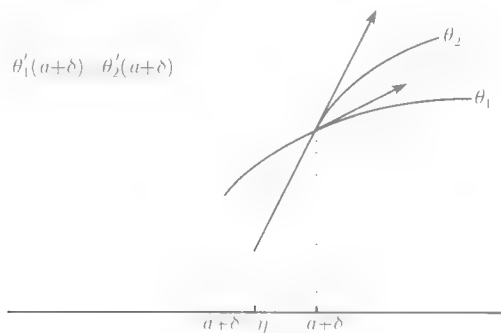


图 2.7

于是存在区间 $(a+\delta-\eta, a+\delta)$, 使得在此区间上

$$\theta_2(x) < \theta_1(x),$$

矛盾! 故必然 $\theta_1(a+\delta) = \theta_2(a+\delta) = 0(\text{mod}\pi)$, 问题变为情形 (3). 记 $c = a+\delta$, 则

$$\theta'_1(c) = \theta'_2(c) = 1.$$

这样在 c 点附近, 在 Taylor 展开中丢掉高阶项, $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ 近似相等, 数值约为

$$k\pi + (x - c).$$

那么在 c 点附近, 丢掉高阶项以后将有

$$\begin{aligned} \theta'_2(x) - \theta'_1(x) &\approx q_1(x) \sin^2(k\pi + (x - c)) - q_2(x) \sin^2(k\pi + (x - c)) \\ &\approx (q_1(c) - q_2(c))(x - c)^2. \end{aligned}$$

这样就存在 c 的邻域, 使得

$$\theta'_2(x) - \theta'_1(x) > 0.$$

(i) 如果 $c = a$, 则

$$\theta_2(x) > \theta_1(x), \quad x \in (a, a + \varepsilon);$$

(ii) 如果 $c = a + \delta$, 则由前面的推理, 将有

$$\theta_2(x) < \theta_1(x), \quad x \in (a + \delta - \varepsilon, a + \delta).$$

矛盾! 所以不可能有 $c = a + \delta$.

引理 2.2.2 设 $q(x, \lambda)$ 是 $[a, b] \times \mathbf{R}$ 上的连续函数, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} q(x, \lambda) = -\infty$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} q(x, \lambda) = \infty$ 关于 $x \in [a, b]$ 一致成立, $\theta(x, \lambda)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \theta' = \cos^2 \theta + q(x, \lambda) \sin^2 \theta, \\ \theta(a) = \alpha \in [0, \pi) \end{cases}$$

的解, 则 $\theta(x, \lambda) \geq 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta(b, \lambda) = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \theta(b, \lambda) = \infty$.

证明 (1) $\theta(x, \lambda) \geq 0$.

若 $\theta(a) > 0$, 则在某个区间 $(a, a + \delta)$ 上 $\theta(x, \lambda) > 0$. 当 $\theta(a) = 0$ 时, 因为

$$\theta'(a, \lambda) = 1,$$

所以也有此结论. 如果 $\theta(x, \lambda)$ 在 $(a, b]$ 上不正, 必有 $c \in (a, b)$ 使得在 (a, c) 上, $\theta > 0$. 但

$$\theta(c, \lambda) = 0,$$

于是

$$\theta'(c, \lambda) = 1,$$



图 2.8

存在某个区间 $(c, c + \eta)$, 使得

$$\theta(x, \lambda) > 0, \quad x \in (c, c + \eta),$$

因此总有

$$\theta(x, \lambda) \geq 0, \quad x \in [a, b].$$

$$(2) \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta(b, \lambda) = 0.$$

任取 $0 < B < \pi$, 取 A 满足 $\alpha < A < \pi$, 作联结 $(a, A), (b, B)$ 的直线 $\theta_0(x)$ 如图 2.9, 因为 $\sin \theta_0(x)$ 在 $[a, b]$ 上有正的下界, $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} q(x, \lambda) = -\infty$ 对 $x \in [a, b]$ 一致成立, 所以存在 λ_0 , 使得当 $\lambda < \lambda_0$ 时有

$$\cos^2 \theta_0(x) + q(x, \lambda) \sin^2 \theta_0(x) < \frac{B - A}{b - a}, \quad x \in [a, b].$$

考虑 $\theta(x, \lambda)$, $(x, \lambda) \in [a, b] \times (-\infty, \lambda_0)$, 这时必有 $\theta(x, \lambda) < \theta_0(x)$, 否则应有一处相交, 在相交点上, 曲线 $\theta(x, \lambda)$ 的斜率将 $\geq \frac{B - A}{b - a}$, 可是在该点上,

$$\theta'(x) = \cos^2 \theta(x) + q(x, \lambda) \sin^2 \theta(x) = \cos^2 \theta_0(x) + q(x, \lambda) \sin^2 \theta_0(x) < \frac{B - A}{b - a},$$

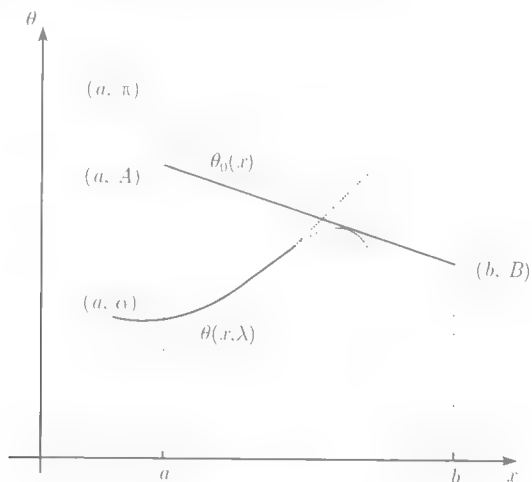


图 2.9

矛盾! 所以, 当 $\lambda < \lambda_0$ 时, 由 (1) 有

$$0 \leq \theta(b, \lambda) < B.$$

由于 B 是任意的, 故

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta(b, \lambda) = 0.$$

$$(3) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \theta(b, \lambda) = \infty.$$

因为 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} q(x, \lambda) = \infty$ 对 $x \in [a, b]$ 一致成立, 故对任意的 $M > 0$ 存在 λ_1 , 使得当 $\lambda > \lambda_1$ 时, $q(x, \lambda) > M$ 且

$$\cos^2 \theta(x, \lambda) + q(x, \lambda) \sin^2 \theta(x, \lambda) > 0, \quad x \in [a, b].$$

于是当 $(x, \lambda) \in [a, b] \times (\lambda_1, \infty)$ 时, $\theta'(x, \lambda) > 0$, 即当 $\lambda > \lambda_1$ 时, $\theta(x, \lambda)$ 是 x 的增函数. 这时, 固定 $\lambda > \lambda_1$, $[a, b]$ 是两个不相交的集合的并,

$$U_\lambda = \left\{ x \in [a, b] \mid |\sin \theta(x, \lambda)| > M^{-\frac{1}{3}} \right\},$$

$$V_\lambda = \left\{ x \in [a, b] \mid |\sin \theta(x, \lambda)| \leq M^{-\frac{1}{3}} \right\}.$$

前者是一些开区间的并, 后者是一些闭区间的并, 这两类区间是相互交错的, 下面来估计这种小区间的长度. 对任何 $x \in U_\lambda$ 都有

$$\theta'(x, \lambda) > M^{\frac{1}{3}}.$$

在各个小区间上, $\theta(x, \lambda)$ 的变化小于 π , M 越大, 变化范围也就越接近 π . 由中值定理, 这种小区间的长度有估计

$$\frac{\pi}{\eta - \xi} > \frac{\theta(\eta, \lambda) - \theta(\xi, \lambda)}{\eta - \xi} = \theta'(x_0, \lambda) \geq M^{\frac{1}{3}},$$

$$\eta - \xi < \pi M^{-\frac{1}{3}}.$$

而对任何 $x \in V_\lambda$ 都有

$$\theta'(x, \lambda) = (1 - \sin^2 \theta(x, \lambda)) + q(x, \lambda) \sin^2 \theta(x, \lambda) > 1 - M^{-\frac{2}{3}}.$$

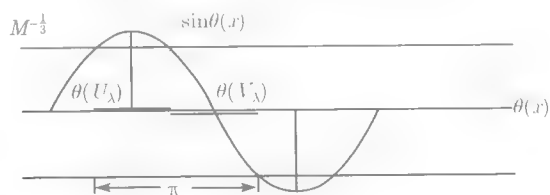


图 2.10

当 M 充分大时, $\theta(x, \lambda)$ 在某 $n\pi$ 附近变化, 所以在这种小区间上, $\theta(x, \lambda)$ 在正弦的一个单值分支的定义域内. 所以

$$\begin{aligned} \theta(\eta, \lambda) - \theta(\xi, \lambda) &= (-1)^{n-1}n\pi - \arcsin(\sin \theta(\eta, \lambda)) - (-1)^{n-1}n\pi + \arcsin(\sin \theta(\xi, \lambda)) \\ &= \arcsin(\sin \theta(\xi, \lambda)) - \arcsin(\sin \theta(\eta, \lambda)) \leq 2 \arcsin M^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

由

$$\frac{\theta(\eta, \lambda) - \theta(\xi, \lambda)}{\eta - \xi} = \theta'(x_0, \lambda) > 1 - M^{-\frac{2}{3}}$$

得这种子区间的长度

$$\eta - \xi < \left(1 - M^{-\frac{2}{3}}\right)^{-1} (\theta(\eta, \lambda) - \theta(\xi, \lambda)) \leq \left(1 - M^{-\frac{2}{3}}\right)^{-1} 2 \arcsin M^{-\frac{1}{3}}.$$

由于

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\pi}{M^{\frac{1}{3}}} = 0, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2 \arcsin M^{-\frac{1}{3}}}{1 - M^{-\frac{2}{3}}} = 0,$$

所以 M 越大, $[a, b]$ 上这种交错子区间的对数 $n(M)$ 就越多, $\lim_{M \rightarrow \infty} n(M) = \infty$. 每经过一对这样的子区间, $\theta(x, \lambda)$ 就要相差一个 π , 因为 $\theta(x, \lambda)$ 是 x 的增函数, 故当 $\lambda > \lambda_1$ 时,

$$\theta(b, \lambda) - \theta(a, \lambda) > n(M)\pi.$$

因此

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \theta(b, \lambda) = \infty.$$

定理 2.2.3 设 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓,

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) | f(0) \cos \alpha - f'(0) \sin \alpha = 0, f(\pi) \cos \beta - f'(\pi) \sin \beta = 0\},$$

$$0 \leq \alpha < \pi, \quad 0 < \beta \leq \pi,$$

则

(1) T 有可数多个特征值

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty;$$

(2) 对应于 λ_n 的规范化特征函数 $\varphi_n(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有 n 个简单零点.

证明 令

$$\begin{cases} y(x, \lambda) = \rho(x, \lambda) \sin \theta(x, \lambda), \\ y'(x, \lambda) = \rho(x, \lambda) \cos \theta(x, \lambda), \end{cases}$$

其中, $y(x, \lambda)$ 满足

$$-y'' + qy = \lambda y.$$

于是

$$\rho'(x, \lambda) = \frac{1}{2} (1 + q(x) - \lambda) \rho(x, \lambda) \sin 2\theta(x, \lambda),$$

$$\theta'(x, \lambda) = \cos^2 \theta(x, \lambda) + (\lambda - q(x)) \sin^2 \theta(x, \lambda).$$

初始条件 $\theta(0, \lambda) = \alpha$ 唯一确定了 $\theta(x, \lambda)$, 由引理 2.2.1, 它是 λ 的增函数; 由引理 2.2.2, 它非负且

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta(\pi, \lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \theta(\pi, \lambda) = \infty.$$

由于有了 $\theta(x, \lambda)$, 从 ρ 的微分方程可解得

$$\ln \rho(x, \lambda) = \frac{1}{2} \int_0^x (1 + q(t) - \lambda) \sin 2\theta(t, \lambda) dt,$$

$$\ln \rho(0, \lambda) = 0, \quad \rho(0, \lambda) = 1,$$

$$\rho(x, \lambda) = e^{\frac{1}{2} \int_0^x (1 + q(t) - \lambda) \sin 2\theta(t, \lambda) dt}.$$

当 λ 固定时, $\rho(x, \lambda)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 有正的下界.

$$y(x, \lambda) = \rho(x, \lambda) \sin \theta(x, \lambda)$$

满足

$$-y'' + qy = \lambda y$$

且

$$y(0) \cos \alpha - y'(0) \sin \alpha = \sin \theta(0, \lambda) \cos \alpha - \cos \theta(0, \lambda) \sin \alpha = \sin(\theta(0, \lambda) - \alpha) = 0,$$

代入第 2 个边条件

$$\begin{aligned} y(\pi) \cos \beta - y'(\pi) \sin \beta &= \rho(\pi, \lambda) (\sin \theta(\pi, \lambda) \cos \beta - \cos \theta(\pi, \lambda) \sin \beta) \\ &= \rho(\pi, \lambda) \sin(\theta(\pi, \lambda) - \beta). \end{aligned}$$

如果能找到 λ_n , 使得 $\theta(\pi, \lambda_n) = \beta + n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (因为 $\theta(x, \lambda) > 0$, $0 < \beta \leq \pi$ 所以 n 只好取非负整数), 则 $y(x, \lambda_n)$ 也满足第 2 个边条件, 因而 λ_n 是特征值而 $y(x, \lambda_n)$ 是特征函数.

事实上, $\theta(\pi, \lambda)$ 是 λ 的严格增函数, $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta(\pi, \lambda) = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \theta(\pi, \lambda) = \infty$, 所以方程 $\theta(\pi, \lambda) = \beta + n\pi$ 有唯一解 λ_n , 这样, 由单调性和 $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \theta(\pi, \lambda) = \infty$ 便可以得出无穷多个特征值 λ_n 满足

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

对每个 λ_n , 特征函数是 $y(x, \lambda_n) = \rho(x, \lambda_n) \sin \theta(x, \lambda_n)$, 以 $\varphi_n(x)$ 表示它的规范化. 下面考虑 $\varphi_n(x)$ 的零点. 因为 $\rho(x, \lambda_n)$ 有正的下界, 所以 $\varphi_n(x)$ 的零点是使 $\theta(x, \lambda_n) = 0(\text{mod } \pi)$ 的点, 在这种点上

$$\varphi_n'(x) = c_n y'(x, \lambda_n) = \pm c_n \rho(x, \lambda_n) \neq 0, \quad y'(x, \lambda_n) = \rho(x, \lambda_n) \cos \theta(x, \lambda_n),$$

因此零点是简单的. 如果

$$\theta(x_0, \lambda_n) = k\pi,$$

则

$$\theta'(x_0, \lambda_n) = 1.$$

所以 $\theta(x, \lambda_n)$ 在 x_0 关于 x 是增加的, 这样 $\theta(x, \lambda_n)$ 便只能取一次 $k\pi$ 这个值. 否则存在 $x_1 > x_0$ 使得 $\theta(x_1, \lambda_n) = k\pi$, 则 $\theta'(x_1, \lambda_n) < 0$, 这不可能! 当 $n > 0$ 时,

$$\theta(0, \lambda_n) = \alpha, \quad \theta(\pi, \lambda_n) = \beta + n\pi.$$

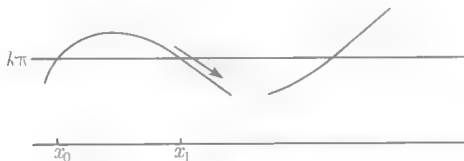


图 2.11

所以 $(\alpha, \beta + n\pi) \subset \theta(x, \lambda_n)$ 的值域. 因为

$$0 \leq \alpha < \pi, \quad 0 < \beta \leq \pi,$$

所以

$$\pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi \in (\alpha, \beta + n\pi),$$

于是 $\varphi_n(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上至少有 n 个零点. $\varphi_n(x)$ 又不能再有别的零点, 如果它还有一个零点 x_1 , 则

$$\theta(x_1, \lambda_n) = k\pi, \quad k \geq n+1.$$

于是由 $\theta'(x_1, \lambda_n) = 1$, $\theta(x, \lambda_n)$ 在这种点处关于 x 是增加的,

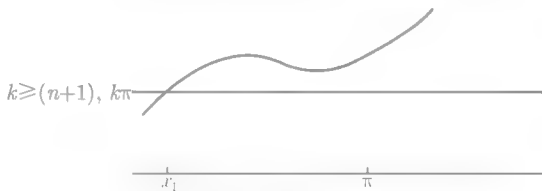


图 2.12

于是

$$(n+1)\pi \geq \beta + n\pi = \theta(\pi, \lambda_n) > \theta(x_1, \lambda_n) > (n+1)\pi,$$

矛盾! 所以 $\varphi_n(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上恰有 n 个零点.

2.3 按特征函数的展开

这一部分要证明 T 的特征函数组成了平方可积的函数空间 $L^2[0, \pi]$ 的规范正交基, 由此便得到 T 的谱分解. 这便是 Hilbert-Steklov 的理论. 考虑微分算式

$$M = -D^2 + q, \quad x \in [0, \pi], \quad q \text{ 连续.}$$

设 T 是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \left| \begin{array}{l} l_1(f) = f(0) \cos \alpha - f'(0) \sin \alpha = 0, \\ l_2(f) = f(\pi) \cos \beta - f'(\pi) \sin \beta = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

设 $\{\lambda_n | n = 1, 2, \dots\}$ 是 T 的特征值. φ_n 是对应的规范化特征函数. 如果 $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, 来证明 $\lambda \in \rho(T)$ 且 $R(\lambda, T)$ 是一个积分算子. 这样 $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup$

$\{\lambda_n | n = 1, 2, \dots\}$. 下面来计算积分算子 $R(\lambda, T)$ 的核 Green 函数. 设 $f \in L^2[0, \pi]$, 下证

$$\begin{cases} \lambda y - My = f, \\ l_1(y) = l_2(y) = 0 \end{cases}$$

有唯一解. 设 $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)$ 分别满足

$$\begin{cases} My_1 = \lambda y_1, \\ y_1(0) = \sin \alpha, \\ y_1'(0) = \cos \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} My_2 = \lambda y_2, \\ y_2(\pi) = \sin \beta, \\ y_2'(\pi) = \cos \beta, \end{cases}$$

由定理 2.1.1, y_1, y_2 都是 λ 的整函数, 显然 $l_1(y_1) = 0, l_2(y_2) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda y_1 y_2 - \lambda y_1 y_2 = y_2 M y_1 - y_1 M y_2 = y_2 (-y_1'' + q y_1) - y_1 (-y_2'' + q y_2) \\ &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = (y_1 y_2' - y_1' y_2)', \end{aligned}$$

所以 $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ 与 x 无关, 它是 λ 的一个整函数, 记为 $\omega(\lambda)$, 当 $\lambda \neq \lambda_n, n = 1, 2, \dots$ 时, y_1, y_2 线性无关, 于是 $\omega(\lambda) \neq 0$ ^①. 这样, 非齐次微分方程边值问题的解 y 便可表示成 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_0$, 其中, y_0 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \lambda y - My = f, \\ y(0, \lambda) = y'(0, \lambda) = 0 \end{cases}$$

的解.

用常数变易法来求 y_0 . 设 $y_0 = Ay_1 + By_2$, 则

$$\begin{aligned} y_0' &= Ay_1' + By_2', \quad A'y_1 + B'y_2 = 0, \\ y_0'' &= A'y_1' + B'y_2' + Ay_1'' + By_2'', \\ f &= \lambda y_0 - M y_0 = \lambda y_0 + y_0'' - q y_0 \\ &= \lambda (Ay_1 + By_2) + A'y_1' + B'y_2' + Ay_1'' + By_2'' - q(Ay_1 + By_2) \\ &= A'y_1' + B'y_2', \end{aligned}$$

由

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0, \\ A'y_1' + B'y_2' = f \end{cases}$$

① 否则, 如果 $\omega(\lambda) = 0$, 则 $y_1(x, \lambda)$ 与 $y_2(x, \lambda)$ 相关, 所以 λ 是特征值, 因此

λ 是特征值 $\Leftrightarrow \lambda$ 是 $\omega(\lambda)$ 的零点.

这就给出了一个确定特征值的方法.

解得

$$A' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\omega(\lambda)} = -\frac{fy_2}{\omega(\lambda)},$$

$$B' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\omega(\lambda)} = \frac{fy_1}{\omega(\lambda)}.$$

于是

$$A = \int_0^x \left(\frac{-f(t)y_2(t, \lambda)}{\omega(\lambda)} \right) dt + a,$$

$$B = \int_0^x \frac{f(t)y_1(t, \lambda)}{\omega(\lambda)} dt + b.$$

这样

$$y_0 = ay_1 + by_2 + \int_0^x \frac{f(t)}{\omega(\lambda)} (y_1(t, \lambda)y_2(x, \lambda) - y_1(x, \lambda)y_2(t, \lambda)) dt.$$

由

$$\begin{cases} 0 = y_0(0, \lambda) = ay_1(0, \lambda) + by_2(0, \lambda), \\ 0 = y_0'(0, \lambda) = ay_1'(0, \lambda) + by_2'(0, \lambda), \end{cases}$$

因为 $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)$ 线性无关, 故 $a = b = 0$, 所以

$$y_0(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\omega(\lambda)} (y_1(t, \lambda)y_2(x, \lambda) - y_1(x, \lambda)y_2(t, \lambda)) dt.$$

现在再用边条件来定 c_1 与 c_2 .

$$\begin{cases} 0 = l_1(y) = c_1 l_1(y_1) + c_2 l_1(y_2) + l_1(y_0) = c_2 l_1(y_2), \\ 0 = l_2(y) = c_1 l_2(y_1) + c_2 l_2(y_2) + l_2(y_0) = c_1 l_2(y_1) + l_2(y_0), \end{cases}$$

由于 λ 不是特征值, $l_1(y_2) \neq 0$, 故 $c_2 = 0$. 所以

$$c_1 (y_1(\pi, \lambda) \cos \beta - y_1'(\pi, \lambda) \sin \beta) + \frac{\cos \beta}{\omega(\lambda)} \int_0^\pi f(t) (y_1(t, \lambda)y_2(\pi, \lambda) - y_1(\pi, \lambda)y_2(t, \lambda)) dt$$

$$- \frac{\sin \beta}{\omega(\lambda)} \int_0^\pi f(t) (y_1(t, \lambda)y_2'(\pi, \lambda) - y_1'(\pi, \lambda)y_2(t, \lambda)) dt = 0,$$

而

$$\omega(\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(\pi, \lambda) & y_2(\pi, \lambda) \\ y_1'(\pi, \lambda) & y_2'(\pi, \lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(\pi, \lambda) & \sin \beta \\ y_1'(\pi, \lambda) & \cos \beta \end{vmatrix} = y_1(\pi, \lambda) \cos \beta - y_1'(\pi, \lambda) \sin \beta,$$

$$l_2(y_2) = 0,$$

故

$$c_1\omega(\lambda) + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^\pi (-y_1(\pi, \lambda) \cos \beta + y_1'(\pi, \lambda) \sin \beta) f(t) y_2(t, \lambda) dt = 0,$$

即

$$c_1\omega(\lambda) - \int_0^\pi f(t) y_2(t, \lambda) dt = 0,$$

$$c_1 = \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^\pi f(t) y_2(t, \lambda) dt.$$

这样便得

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^\pi f(t) y_1(x, \lambda) y_2(t, \lambda) dt \\ &\quad + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^x f(t) (y_1(t, \lambda) y_2(x, \lambda) - y_1(x, \lambda) y_2(t, \lambda)) dt \\ &= \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^x f(t) y_1(t, \lambda) y_2(x, \lambda) dt + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_x^\pi f(t) y_1(x, \lambda) y_2(t, \lambda) dt \\ &= \int_0^\pi G(x, t, \lambda) f(t) dt, \end{aligned}$$

其中,

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{y_1(t, \lambda) y_2(x, \lambda)}{\omega(\lambda)}, & t \leq x, \\ \frac{y_1(x, \lambda) y_2(t, \lambda)}{\omega(\lambda)}, & t \geq x. \end{cases}$$

这样边值问题的解便存在, 而且解必然唯一, 因为若 y 与 \tilde{y} 都是解, 则 $y - \tilde{y}$ 满足

$$\begin{cases} Mz = \lambda z, \\ l_1(z) = l_2(z) = 0. \end{cases}$$

由于 λ 不是特征值, 它只有零解, 于是 $y = \tilde{y}$.

显然 $G(x, t, \lambda)$ 有下列性质:

(1) $G(x, t, \lambda)$ 是 $\{(x, t) | 0 \leq x, t \leq \pi\}$ 上的连续函数;

(2)

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t+0, t, \lambda) - \frac{\partial G}{\partial x}(t-0, t, \lambda) = \frac{y_1(t, \lambda) y_2'(t, \lambda)}{\omega(\lambda)} - \frac{y_1'(t, \lambda) y_2(t, \lambda)}{\omega(\lambda)} = 1;$$

(3) 对固定的 (x, t) , $G(x, t, \lambda)$ 是 λ 的半纯函数. 特征值 $\lambda_n, n = 1, 2, \dots$ 是它的简单极点 (特征值是一重的);

(4) $G(x, t, \lambda) = G(t, x, \lambda)$;

(5) 因为 $y_i(x, \bar{\lambda}) = \overline{y_i(x, \lambda)}$, $i = 1, 2$, 所以 $\omega(\bar{\lambda}) = \overline{\omega(\lambda)}$. 于是

$$G(x, t, \bar{\lambda}) = \overline{G(x, t, \lambda)}.$$

如果 λ 是实的, 则 $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)$ 可取为实的, 于是 $\omega(\lambda)$ 也是实的, 因此 $G(x, t, \lambda)$ 是实的.

(6) 作为 x 的连续函数, 当 $x \neq t$ 时, $MG = \lambda G$ 且 $l_1(G) = l_2(G) = 0$.

称 $G(x, t, \lambda)$ 为边值问题

$$\begin{cases} \lambda y - My = f, \\ l_1(y) = l_2(y) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数.

从以上的计算, 得到

定理 2.3.1 如果 λ 不是特征值, 则对任何 $f \in L^2[0, \pi]$, 存在唯一的 $y \in \mathcal{D}(T)$, 使得

$$\lambda y - My = f$$

且

$$y(x, \lambda) = \int_0^\pi G(x, t, \lambda) f(t) dt.$$

换句话说, $\lambda \in \rho(T)$ 并且 $R(\lambda, T)$ 是以 Green 函数为核的积分算子.

定义 2.3.1 设 H 是 Hilbert 空间, Ω 是测度空间, $T: H \rightarrow L^2(\Omega)$ 是线性算子. 如果存在抽象函数 $K: \Omega \rightarrow H$, 使得对一切 $f \in \mathcal{D}(T)$, $(Tf)(x) = (K(x), \bar{f})$ 关于 $x \in \Omega$ 几乎处处成立, (\cdot, \cdot) 是 H 里的内积, 则称 T 是一个 Carleman 算子.

在这里, $H = L^2[0, \pi]$, $\Omega = [0, \pi]$,

$$K(x) = G(x, \cdot, \lambda),$$

$$(R(\lambda, T)f)(x) = \int_0^\pi G(x, t, \lambda) f(t) dt = (K(x), \bar{f}),$$

所以 $R(\lambda, T)$ 是一个 Carleman 算子. 实际上, 由于 G 是二元连续函数, 属于 $L^2([0, \pi] \times [0, \pi])$, $R(\lambda, T)$ 是个 Hilbert-Schmidt 算子, 因而 $R(\lambda, T)$ 还是紧算子.

定理 2.3.1 的证明

G 在 $\{(x, t) | 0 \leq x, t \leq \pi\}$ 上连续, $f \in L^2[0, \pi]$, 所以积分

$$y(x, \lambda) = \int_0^\pi G(x, t, \lambda) f(t) dt$$

存在, 由于 G 满足边条件, 故

$$l_1(y) = l_2(y) = 0.$$

下面验证它满足方程

$$\begin{aligned}
 y(x, \lambda) &= \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^x f(t) y_1(t, \lambda) y_2(x, \lambda) dt + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_x^\pi f(t) y_1(x, \lambda) y_2(t, \lambda) dt, \\
 y'(x, \lambda) &= \frac{1}{\omega(\lambda)} f(x) y_1(x, \lambda) y_2(x, \lambda) + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^x f(t) y_1(t, \lambda) y_2'(x, \lambda) dt \\
 &\quad - \frac{1}{\omega(\lambda)} f(x) y_1(x, \lambda) y_2'(x, \lambda) + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_x^\pi f(t) y_1'(x, \lambda) y_2(t, \lambda) dt \\
 &= \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^x f(t) y_1(t, \lambda) y_2'(x, \lambda) dt + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_x^\pi f(t) y_1'(x, \lambda) y_2(t, \lambda) dt, \\
 y''(x, \lambda) &= \frac{1}{\omega(\lambda)} f(x) y_1(x, \lambda) y_2''(x, \lambda) + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^x f(t) y_1(t, \lambda) y_2''(x, \lambda) dt \\
 &\quad - \frac{1}{\omega(\lambda)} f(x) y_1'(x, \lambda) y_2(x, \lambda) + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_x^\pi f(t) y_1''(x, \lambda) y_2(t, \lambda) dt \\
 &\quad - f(x) + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^x f(t) y_1(t, \lambda) y_2''(x, \lambda) dt + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_x^\pi f(t) y_1''(x, \lambda) y_2(t, \lambda) dt, \\
 \lambda y(x, \lambda) - M y(x, \lambda) &= \frac{\lambda}{\omega(\lambda)} \int_0^x f(t) y_1(t, \lambda) y_2(x, \lambda) dt + \frac{\lambda}{\omega(\lambda)} \int_x^\pi f(t) y_1(x, \lambda) y_2(t, \lambda) dt \\
 &\quad + f(x) + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^x f(t) y_1(t, \lambda) y_2''(x, \lambda) dt \\
 &\quad + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_x^\pi f(t) y_1''(x, \lambda) y_2(t, \lambda) dt \\
 &\quad - q(x) \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^x f(t) y_1(t, \lambda) y_2(x, \lambda) dt \\
 &\quad - q(x) \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_x^\pi f(t) y_1(x, \lambda) y_2(t, \lambda) dt \\
 &= \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^x f(t) y_1(t, \lambda) (\lambda y_2(x, \lambda) + y_2''(x, \lambda) - q(x) y_2(x, \lambda)) dt \\
 &\quad + \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_x^\pi f(t) y_2(t, \lambda) (\lambda y_1(x, \lambda) + y_1''(x, \lambda) - q(x) y_1(x, \lambda)) dt + f(x) \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

推论 2.3.1 T 有纯点谱.

推论 2.3.2 $\operatorname{res}_{\lambda_n} G = \varphi_n(x) \varphi_n(t)$.

证明 因为 λ_n 是 $\omega(\lambda)$ 的简单零点, 所以

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) G(x, t, \lambda) = c y_1(t, \lambda_n) y_2(x, \lambda_n) = \tilde{c} \varphi_n(x) \varphi_n(t).$$

下面来定 \tilde{c} . 因为 $\frac{1}{\lambda - \lambda_n} y_2(x, \lambda_n)$ 满足 2 个边条件且

$$(\lambda - M) \frac{1}{\lambda - \lambda_n} y_2(x, \lambda_n) = (\lambda - \lambda_n) \frac{1}{\lambda - \lambda_n} y_2(x, \lambda_n) - y_2(x, \lambda_n),$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{y_2(x, \lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} &= \int_0^\pi G(x, t, \lambda) y_2(t, \lambda_n) dt, \\ \int_0^\pi (\lambda - \lambda_n) G(x, t, \lambda) y_2(t, \lambda_n) dt &= y_2(x, \lambda_n). \end{aligned}$$

让 $\lambda \rightarrow \lambda_n$, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \tilde{c} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \varphi_n(t) dt &= \varphi_n(x), \\ \tilde{c} \varphi_n(x) &= \varphi_n(x), \end{aligned}$$

所以 $\tilde{c} = 1$.

从 2.1 节得到的特征值的渐进估计知

$$\lambda_n = s_n^2, \quad s_n = O(n),$$

所以

$$\lambda_n = O(n^2).$$

于是可以考虑级数

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(t)}{\lambda - \lambda_n},$$

由引理 2.1.2, $\varphi_n(x)$ 关于 n 有界, 所以级数在

$$\{(x, t) | 0 \leq x, t \leq \pi\} \times \{\lambda | \lambda \neq \lambda_n, n = 1, 2, \dots\}$$

上绝对收敛. 如果 (x, t) 固定, $\lambda \neq \lambda_n, n = 1, 2, \dots$, 则 $R(x, t, \lambda)$ 在 λ 处解析. 因为存在闭圆

$$B_\delta(\lambda) = \{\mu | |\mu - \lambda| \leq \delta\},$$

使得

$$B_\delta(\lambda) \cap \{\lambda_n | n = 1, 2, \dots\} = \emptyset$$

每一个 $\frac{\varphi_n(x) \varphi_n(t)}{\mu - \lambda_n}$ 在 $B_\delta(\lambda)$ 上解析, 由于

$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$, 所以存在 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时,

$$|\lambda - \lambda_n| \geq \lambda_n - |\lambda| > \delta.$$

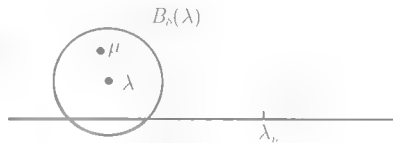


图 2.13

于是

$$|\mu - \lambda_n| \geq |\lambda - \lambda_n| - |\lambda - \mu| > |\lambda - \lambda_n| - \delta \geq \lambda_n - |\lambda| - \delta,$$

$$\frac{|\varphi_n(x)\varphi_n(t)|}{|\mu - \lambda_n|} \leq \frac{c}{\lambda_n - |\lambda| - \delta}.$$

这样级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\mu - \lambda_n}$ 便在 $B_\delta(\lambda)$ 上一致收敛, 所以 $R(x, t, \mu)$ 在 $B_\delta(\lambda)$ 上解析.

于是 $R(x, t, \lambda)$ 是 λ 的半纯函数, $\{\lambda_n | n = 1, 2, \dots\}$ 是它的极点. 所以 $R(x, t, \lambda)$ 是 $G(x, t, \lambda)$ 的主要部分. 令

$$E(x, t, \lambda) = G(x, t, \lambda) - R(x, t, \lambda),$$

则 $E(x, t, \lambda)$ 是 λ 的整函数.

定理 2.3.2 $E(x, t, \lambda) \equiv 0$.

证明 因为 $E(x, t, \lambda)$ 是整函数, 所以只要证明 $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{\lambda_n | n = 1, 2, \dots\}$ 时, $E(x, t, \lambda) = 0$ 即可. 由于当 $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{\lambda_n | n = 1, 2, \dots\}$ 时,

$$G(x, t, \lambda) = \overline{G(x, t, \lambda)} = \overline{G(t, x, \lambda)}$$

且 $G(x, t, \lambda)$ 在 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 上连续, 所以算子

$$(Ef)(x) = \int_0^\pi E(x, t, \lambda)f(t)dt$$

是 $L^2[0, \pi] \rightarrow L^2[0, \pi]$ 的紧自伴算子. 如果 $E(x, t, \lambda) \neq 0$, E 是个非零算子, 必有非零的实特征值 μ ($\|E\| \neq 0$), 设对应的特征向量为 h , 则 (可以假定 h 是实的!)

$\int_0^\pi E(x, t, \lambda)h(t)dt = \mu h(x)$, (由此可见 h 连续!) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} < \infty$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda - \lambda_n} h(t)$ 当 x 固定时, 对 t 一致收敛. 因此可以逐项积分

$$\mu h(x) = \int_0^\pi G(x, t, \lambda)h(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x), \quad h_n = \int_0^\pi h(t)\varphi_n(t)dt.$$

这样两边乘以 $\varphi_m(x)$ 再积分

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \varphi_m(x) \left(\int_0^\pi G(x, t, \lambda)h(t)dt \right) dx \\ &= \mu \int_0^\pi h(x)\varphi_m(x)dx + \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx, \end{aligned}$$

左边由于 G 连续, 二重积分绝对收敛, 可用 Fubini 定理. 而右边由于

$$|h_n| \leq \|h\| \cdot \|\varphi_n\| = \|h\|, \quad \lambda_n = O(n^2), \quad |\varphi_n(x)| \leq c, \quad x \in [0, \pi], \quad n = 1, 2, \dots,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x) \varphi_m(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上一致收敛, 可以逐项积分, 因此得

$$\int_0^{\pi} h(t) \left(\int_0^{\pi} G(x, t, \lambda) \varphi_m(x) dx \right) dt = \mu h_m + \frac{h_m}{\lambda - \lambda_m},$$

但是由推论 2.3.2 的证明可知

$$\int_0^{\pi} G(x, t, \lambda) \varphi_m(x) dx = \int_0^{\pi} G(t, x, \lambda) \varphi_m(x) dx = \frac{\varphi_m(t)}{\lambda - \lambda_m}.$$

于是

$$\frac{h_m}{\lambda - \lambda_m} = \mu h_m + \frac{h_m}{\lambda - \lambda_m},$$

$\mu h_m = 0$, 所以 $h_m = 0$. 这样使得

$$\int_0^{\pi} G(x, t, \lambda) h(t) dt = \mu h(x).$$

左边作为 x 的函数在 $\mathscr{D}(T)$ 中, 而

$$(\lambda I - T) \mu h(x) = (\lambda I - T) \int_0^{\pi} G(x, t, \lambda) h(t) dt = h(x),$$

即

$$Th = \left(\lambda - \frac{1}{\mu} \right) h.$$

这表示 $\lambda - \frac{1}{\mu}$ 也是特征值, 这是不可能的, 故 $E(x, t, \lambda) = 0$. ($\lambda - \frac{1}{\mu}$ 不可能是某个 λ_n , 因为 $h_n = (h, \varphi_n) = 0$!)

推论 2.3.3 设 $\lambda \neq \lambda_n, n = 1, 2, \dots$, 则对任意的 $f \in L^2[0, \pi]$,

$$(R(\lambda, T)f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x),$$

其中, $f_n = (f, \varphi_n)$, $n = 1, 2, \dots$, 级数在 $[0, \pi]$ 上绝对一致收敛.

证明

$$G(x, t, \lambda) = R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(t)}{\lambda - \lambda_n},$$

对于固定的 x , 作为 t 的函数, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda - \lambda_n}$ 一致收敛到 $G(x, t, \lambda)$, 因而平均收敛, 于是由内积的连续性可得

$$\int_0^\pi G(x, t, \lambda) f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\lambda - \lambda_n} \int_0^\pi f(t) \varphi_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x),$$

而

$$|f_n| \leq \|f\|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$|\varphi_n(x)| \leq A, n = 1, 2, \dots$, (由引理 2.1.2) 故收敛是绝对一致收敛.

定理 2.3.3 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2[0, \pi]$ 的规范正交基.

证明 设 $f \in L^2[0, \pi]$, 若 $f_n = (f, \varphi_n) = 0, n = 1, 2, \dots$, 则 $R(\lambda, T)f = 0$. 于是 $f = 0$.

由此不难得到 T 的谱分解

$$P_\lambda f = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} (f, \varphi_n) \varphi_n, \quad \lambda \in (-\infty, \infty),$$

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda.$$

特别地, 如果 $u \in C^2[0, \pi], l_1(u) = l_2(u) = 0$, 则 $u \in \mathcal{D}(T)$, 记 $f = (\lambda I - T)u$. 则 $u = R(\lambda, T)f$, 那么

$$u(x) = (R(\lambda, T)f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x) \text{ 在 } [0, \pi] \text{ 上一致成立,}$$

$$f_n = (f, \varphi_n) = ((\lambda - T)u, \varphi_n) = (\lambda - \lambda_n)(u, \varphi_n),$$

所以 $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \varphi_n) \varphi_n(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上一致成立.

例 2.3.1 $M = -D^2, x \in [0, 1], T_0(M)$ 下半有界, 下界为 0^①. T 是 $T_0(M)$ 的 Friedrichs 延拓, 所以 $\sigma(T) \subset [0, \infty)$,

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) | f(0) = f(1) = 0\}.$$

来求 $\sigma(T)$. 考虑

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

① $f \in C_0^\infty(0, 1), (T_0(M)f, f) = \int_0^1 -f''\bar{f} dx = -f'\bar{f}|_0^1 + \int_0^1 |f'|^2 dx = \int_0^1 |f'|^2 dx \geq 0$.

(1) $\lambda < 0, \lambda = -k^2,$

$$y = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx},$$

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{-k} + c_2 e^k = 0, \end{cases}$$

所以 $c_1 = c_2 = 0, \lambda$ 不是特征值.

(2) $\lambda = 0,$

$$y = c_1 + c_2 x,$$

$$y(0) = 0, \quad c_1 = 0,$$

$$y(1) = 0, \quad c_2 = 0,$$

λ 也不是特征值.

(3) $\lambda > 0, \lambda = k^2,$

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx,$$

$$y(0) = 0, \quad c_1 = 0,$$

$$y(1) = 0, \quad c_2 \sin k = 0,$$

$k = n\pi, n = 1, 2, \dots, \quad \lambda = n^2\pi^2, n = 1, 2, \dots,$ 所以

$$\sigma(T) = \{n^2\pi^2 | n = 1, 2, \dots\},$$

$$\int_0^1 \sin^2 n\pi x dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos 2n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2},$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x.$$

对任意的 $f \in L^2[0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f(t) \sqrt{2} \sin n\pi t dt \cdot \sqrt{2} \sin n\pi x \\ &\quad - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f(t) \sin n\pi t dt \cdot \sin n\pi x, \end{aligned}$$

这是 Fourier 正弦展开.

当 $\lambda \neq n^2\pi^2, n = 1, 2, \dots$ 时, 来求 $R(\lambda, T)$, 即要求 Green 函数 $G(x, t, \lambda)$. 假设 $\lambda \neq 0,$

$$\begin{cases} -y_1'' = \lambda y_1, \\ y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1, \end{cases}$$

$$y_1 = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x$$

因为 $y_1(0) = 0$, 所以 $A = 0$; 而 $y_1'(0) = 1$, 所以 $B\sqrt{\lambda} = 1$, $B = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. 于是

$$y_1(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}.$$

再设

$$\begin{cases} -y_2'' = \lambda y_2, \\ y_2(1) = 0, \quad y_2'(1) = 1, \end{cases}$$

$$y_2 = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x,$$

因为 $y_2(1) = 0$, 所以

$$A \cos \sqrt{\lambda} + B \sin \sqrt{\lambda} = 0;$$

而 $y_2'(1) = 1$, 所以

$$-\sqrt{\lambda}A \sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}B \cos \sqrt{\lambda} = 1.$$

于是

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \sin \sqrt{\lambda} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = -\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

$$B = \begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} & 0 \\ -\sin \sqrt{\lambda} & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

$$y_2 = -\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda}x + \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}(x-1),$$

$$\omega(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} & -\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda}x + \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x \\ \cos \sqrt{\lambda}x & \sin \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + \cos \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}.$$

可见

$$\sigma(T) = \{\lambda | \omega(\lambda) = 0\} = \{n^2\pi^2 | n = 1, 2, \dots\}.$$

当 $\lambda \neq 0$ 时,

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} \left(-\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda}x + \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x \right) / \omega(\lambda), & t \leq x, \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \left(-\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda}t + \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}t \right) / \omega(\lambda), & t > x, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} (1-x), & t \leq x, \\ -\frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} (1-t), & t > x. \end{cases}$$

对于 $\lambda = 0$, 取 $y_1(x) = x$, $y_2(x) = -1 + x$, 可得

$$G(x, t, 0) = \begin{cases} t(1-x), & t \leq x, \\ -x(1-t), & t > x. \end{cases}$$

这里只得到了在平均收敛意义下有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n(x), \quad f \in L^2[0, \pi],$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k(x) \right|^2 dx = 0.$$

那么这一收敛性质能否进一步加强呢? 例如, 是否有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x)$$

几乎处处成立, 点点成立或是一致收敛?

下面还是把确定 $\mathcal{D}(T)$ 的边条件写成

$$\begin{cases} f'(0) - hf(0) = 0, \\ f'(\pi) + Hf(\pi) = 0, \end{cases}$$

假定 $h \neq \infty, H \neq \infty$, 其他情况可以类似地讨论. 设 $q(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有有界的导数, 则有

$$\lambda_n = s_n^2, \quad s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad c = \frac{1}{\pi} \left(h + H + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(x) dx \right),$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\cos nx + \frac{\beta(x)}{n} \sin nx \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt.$$

如果 $f \in L^2[0, \pi]$, 则 f 在 $[0, \pi]$ 上 Lebesgue 绝对可积, 考虑它按特征函数展开的部分和

$$S_{n,f}(x) = \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k(x) = \int_0^\pi f(t) \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \varphi_k(t) dt$$

以及在 $[-\pi, \pi]$ 上作偶延拓后按三角函数展开的部分和

$$\sigma_{n,f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx = \int_0^\pi f(t) \left(\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \cos kx \cos kt \right) dt,$$

令

$$S_{n,f}(x) - \sigma_{n,f}(x) = \int_0^\pi \Phi_n(x, t) f(t) dt.$$

引理 2.3.1 存在常数 C , 使得

$$|\Phi_n(x, t)| \leq C, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明

$$\begin{aligned} & \varphi_k(x) \varphi_k(t) - \frac{2}{\pi} \cos kx \cos kt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\beta(x)}{k} \sin kx \cos kt + \frac{\beta(t)}{k} \cos kx \sin kt \right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ &= \frac{2}{k\pi} \left(\left(\frac{\beta(x) + \beta(t)}{2} + \frac{\beta(x) - \beta(t)}{2} \right) \sin kx \cos kt \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\beta(x) + \beta(t)}{2} - \frac{\beta(x) - \beta(t)}{2} \right) \cos kx \sin kt \right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ &= \frac{1}{k\pi} ((\beta(x) + \beta(t)) \sin k(x+t) + (\beta(x) - \beta(t)) \sin k(x-t)) + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

因为 $\beta(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有界, 所以只需证明 $\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$ 在 $[0, \pi]$ 上一致有界即可.

$$\begin{aligned} \tau_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \int_0^x \sum_{k=1}^n \cos kt dt = \int_0^x \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t - \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \int_0^x \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} dt + \int_0^x \left(\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt - \frac{x}{2} \\ &= \int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin u}{u} du + \int_0^x \left(\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt - \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

显然

$$\int_0^N \frac{\sin u}{u} du \leq \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du.$$

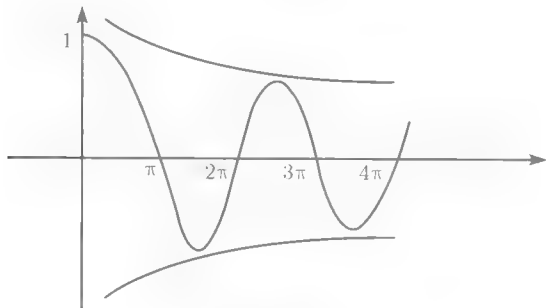


图 2.14

于是

$$|\tau_n(x)| \leq \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du + \int_0^\pi \left| \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right| dt + \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2} + t \cos \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2}}{2 \cos \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}} = 0. \end{aligned}$$

引理 2.3.2 如果 $f \in C^2[0, \pi]$ 且满足边条件

$$f'(0) - hf(0) = 0, \quad f'(\pi) + Hf(\pi) = 0,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \Phi_n(x, t) f(t) dt = 0$$

对于 $x \in [0, \pi]$ 一致成立.

证明 由 Fourier 级数理论,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n,f}(x) = f(x)$$

对于 $x \in [0, \pi]$ 一致成立. 另外, 由推论 2.3.3 也有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,f}(x) = f(x)$$

对于 $x \in [0, \pi]$ 一致成立. 于是得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \Phi_n(x, t) f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n,f}(x) - \sigma_{n,f}(x)) = 0$$

对 $x \in [0, \pi]$ 一致成立.

定理 2.3.4 对任意的 $f \in L^2[0, \pi]$, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n,f}(x) - \sigma_{n,f}(x)) = 0$$

对于 $x \in [0, \pi]$ 一致成立.

证明 任给 $\varepsilon > 0$, $\forall f \in L^2[0, \pi]$, 存在 $h \in C_0^\infty(0, \pi)$, 使得

$$\int_0^\pi |f(x) - h(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

C 即引理 2.3.1 中之常数. 于是

$$S_{n,f}(x) - \sigma_{n,f}(x) = \int_0^\pi \Phi_n(x, t)(f(t) - h(t))dt + \int_0^\pi \Phi_n(x, t)h(t)dt.$$

利用引理 2.3.2, 存在 N , 使得当 $n \geq N$ 时,

$$\left| \int_0^\pi \Phi_n(x, t)h(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in [0, \pi].$$

因此当 $n \geq N$ 时,

$$\begin{aligned} |S_{n,f}(x) - \sigma_{n,f}(x)| &\leq \int_0^\pi |\Phi_n(x, t)| |f(t) - h(t)| dt \\ &\quad + \left| \int_0^\pi \Phi_n(x, t)h(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

这样, $f \in L^2[0, \pi]$ 按特征函数展开的级数在 $[0, \pi]$ 上某一点收敛或发散的性质便取决于它的余弦级数在该点的收敛与发散的性质.

2.4 常型自伴微分算子的谱分解

设

$$M = \sum_{K=0}^n p_k(x) D^k, \quad x \in [a, b]$$

是对称的正则微分算式 (所以系数可以是复的), T 是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓, 则

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \left| U_j f \equiv \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} D^{k-1} f(a) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} D^{k-1} f(b) = 0, j=1, \dots, n \right. \right\},$$

这里 $A = (\alpha_{jk}), B = (\beta_{jk})$ 满足 1.3 节定理的条件. 要考虑 T 的谱分解.

定理 2.4.1 算子 T 存在着至多可数个特征值, 特征值集合没有有限的聚点.

证明 取 $c \in [a, b]$, 设 $\varphi_j(x, \lambda), j=1, \dots, n$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} My = \lambda y, \\ y^{(k-1)}(c) = \delta_{jk}, \quad k=1, \dots, n \end{cases}$$

的解, 则 $\{\varphi_j(x, \lambda) | j=1, \dots, n\}$ 是 $My = \lambda y$ 的一个基本解组. λ 是 T 的特征值当且仅当存在一组不全为 0 的 c_1, \dots, c_n , 使得

$$U_j \left(\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right) = 0, \quad j=1, \dots, n,$$

即 λ 是 T 的特征值当且仅当

$$\Delta(\lambda) = \det(U_j \varphi_k) = 0.$$

因为 $\varphi_j(x, \lambda), j=1, \dots, n$ 是 λ 的整函数, 所以 $\Delta(\lambda)$ 是整函数, 由于 T 没有复特征值, $\Delta(\lambda)$ 是不恒为 0 的整函数, 根据整函数零点的性质, 特征值至多可数, 它们没有有限的聚点.

想证明 T 具有纯点谱, 于是 λ 只要不是特征值, 它就是 T 的正则点, 既然 T 是微分算子, 那么豫解算子 $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ 看来应当是积分算子, 下面来找这个积分算子的核.

定理 2.4.2 存在定义在 $R = \{(x, t, \lambda) | a \leq x, t \leq b, \lambda \in \mathbb{C}\}$ 上的函数 $G(x, t, \lambda)$ 具有下述性质:

(1) 对任何固定的 $(x, t), G(x, t, \lambda)$ 是 λ 的半纯函数, 极点为 T 的特征值 (G 在 \mathbb{C} 上除去极点外是解析的, 如果在极点处令 $G(\lambda) = \infty$, 则 $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是一个连续函数.);

- (2) $\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x, t, \lambda), k = 0, 1, \dots, n-2$ 在 $R_0 = \{(x, t, \lambda) | a \leq x, t \leq b, \lambda \neq \text{特征值}\}$ 上连续. $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, t, \lambda)$ 分别在 $R_1 = R_0 \cap \{(x, t, \lambda) | x < t\}$ 和 $R_2 = R_0 \cap \{(x, t, \lambda) | x \geq t\}$ 上连续;
- (3) $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(t+0, t, \lambda) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(t-0, t, \lambda) = -\frac{1}{p_n(t)}, \lambda \neq \text{特征值};$
- (4) 作为 x 的函数, $\lambda \neq \text{特征值}$, 当 $x \neq t$ 时, $MG = \lambda G$;
- (5) 作为 x 的函数, $\lambda \neq \text{特征值}$, $U_j G = 0, j = 1, \dots, n$;
- (6) $\lambda \neq \text{特征值}$, 边值问题

$$\begin{cases} \lambda y - My = f, \\ U_j y = 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

对任何 $f \in L^2[a, b]$ 都有解

$$y(x, \lambda) = \int_a^b G(x, t, \lambda) f(t) dt;$$

(7) 具有性质 (1)—(6) 的 $G(x, t, \lambda)$ 是唯一的.

称 $G(x, t, \lambda)$ 是边值问题

$$\begin{cases} \lambda y - My = f, \\ U_j y = 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

的 Green 函数或豫解算子 $R(\lambda, t) = (\lambda I - T)^{-1}$ 的 Green 核.

当 $n > 1$ 时, $G(x, t, \lambda)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续. 当 $n = 1$ 时, 由于 $G(t-0, t, \lambda)$ 和 $G(t+0, t, \lambda)$ 存在, 可以将 G 延拓到 $a \leq x \leq t \leq b$ 和 $a \leq t \leq x \leq b$ 闭三角形上成为分别在闭三角形上连续的函数, 所以 λ 不是 T 的特征值时, $G(x, t, \lambda)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上都平方可积. 因此 $\lambda \in \rho(T)$ 且 $R(\lambda, T)$ 是 Carleman 算子.

推论 2.4.1 T 有纯点谱.

定理 2.4.2 的证明

(1) 设 $c \in [a, b]$, 而 $\varphi_1(x, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \lambda)$ 满足

$$\begin{cases} M\varphi_j = \lambda\varphi_j, \\ \varphi_j^{(k-1)}(c) = \delta_{jk}, k = 1, \dots, n, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n.$$

令①

$$K(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{p_n(t)W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t)} \begin{vmatrix} \varphi_1(t, \lambda) & \cdots & \varphi_n(t, \lambda) \\ \varphi'_1(t, \lambda) & \cdots & \varphi'_n(t, \lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t, \lambda) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t, \lambda) \end{vmatrix}, & t \leq x, \\ 0, & t > x, \end{cases}$$

① 关于 $K(x, t, \lambda)$ 的讨论:

事实上,

$$My = \lambda y + f, \quad (M - \lambda)y = f.$$

设齐次方程基础解系为 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, 则由常数变易法知

$$\begin{aligned} y &= c_1 \varphi_1 + \cdots + c_n \varphi_n, \\ y' &= c_1 \varphi'_1 + \cdots + c_n \varphi'_n, \quad c'_1 \varphi_1 + \cdots + c'_n \varphi_n = 0, \\ y'' &= c_1 \varphi''_1 + \cdots + c_n \varphi''_n, \quad c'_1 \varphi'_1 + \cdots + c'_n \varphi'_n = 0, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= c_1 \varphi_1^{(n-1)} + \cdots + c_n \varphi_n^{(n-1)}, \quad c'_1 \varphi_1^{(n-2)} + \cdots + c'_n \varphi_n^{(n-2)} = 0, \\ y^{(n)} &= c_1 \varphi_1^{(n)} + \cdots + c_n \varphi_n^{(n)} + c'_1 \varphi_1^{(n-1)} + \cdots + c'_n \varphi_n^{(n-1)}. \end{aligned}$$

代入方程

$$\begin{aligned} My &= \sum_{k=1}^n c_k M \varphi_k + p_n(x) \sum_{k=1}^n c'_k \varphi_k^{(n-1)} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k + f, \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=1}^n c'_k \varphi_k^{(n-1)} = \frac{f}{p_n}.$$

解出

$$\begin{aligned} c'_k &= \frac{1}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & 0 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \cdots & 0 & \cdots & \varphi'_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \frac{f}{p_n} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \\ &= \frac{f(x)}{p_n(x)W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(x)} W_k(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(x), \\ y(x, \lambda) &= \int_a^x \sum_{k=1}^n \frac{f(t)W_k(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t)}{p_n(t)W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t)} \varphi_k(x, \lambda) dt = \int_a^x \frac{f(t)}{p_n(t)W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t)} \\ &\quad \times \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \varphi_k(x, \lambda) \begin{vmatrix} \varphi_1(t, \lambda) & \cdots & \varphi_{k-1}(t, \lambda) & \varphi_{k+1}(t, \lambda) & \cdots & \varphi_n(t, \lambda) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t, \lambda) & \cdots & \varphi_{k-1}^{(n-2)}(t, \lambda) & \varphi_{k+1}^{(n-2)}(t, \lambda) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t, \lambda) \end{vmatrix} dt \\ &= \int_a^x \frac{f(t)}{p_n(t)W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t)} \begin{vmatrix} \varphi_1(t, \lambda) & \cdots & \varphi_n(t, \lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t, \lambda) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t, \lambda) \end{vmatrix} dt \\ &= \int_a^b K(x, t, \lambda) f(t) dt. \end{aligned}$$

由 Liouville 公式, $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) = e^{-\int_c^t \frac{p_{n-1}(s)}{p_n(s)} ds}$, 与 λ 无关. 显然

$$\left. \frac{\partial^j K(x, t, \lambda)}{\partial x^j} \right|_{x=t} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-2,$$

所以 $\frac{\partial^j K(x, t, \lambda)}{\partial x^j}, j = 0, 1, \dots, n-2$ 关于 x, t 在 $R = [a, b] \times [a, b]$ 上连续, 并且对固定的 (x, t) 是 λ 的整函数. $\frac{\partial^{n-1} K}{\partial x^{n-1}}(x, t, \lambda)$ 和 $\frac{\partial^n K}{\partial x^n}(x, t, \lambda)$ 分别在

$$\{(x, t, \lambda) | a \leq x < t \leq b, \lambda \in \mathbf{C}\} \text{ 和 } \{(x, t, \lambda) | a \leq t \leq x \leq b, \lambda \in \mathbf{C}\}$$

上连续, 对固定的 (x, t) , 也是 λ 的整函数且

$$\frac{\partial^{n-1} K}{\partial x^{n-1}}(t+0, t, \lambda) - \frac{\partial^{n-1} K}{\partial x^{n-1}}(t-0, t, \lambda) = \frac{1}{p_n(t)}.$$

当 $x \neq t$ 时, 作为 x 的函数, $MK = \lambda K$. 对任何 $f \in L^2[a, b]$, 令

$$y(x, \lambda) = - \int_a^b K(x, t, \lambda) f(t) dt = - \int_a^x K(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

则

$$y'(x, \lambda) = - \int_a^x \frac{\partial K}{\partial x}(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

...

$$y^{(n-2)}(x, \lambda) = - \int_a^x \frac{\partial^{n-2} K}{\partial x^{n-2}}(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

$$y^{(n-1)}(x, \lambda) = - \int_a^x \frac{\partial^{n-1} K}{\partial x^{n-1}}(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x, \lambda) &= - \int_a^x \frac{\partial^n K}{\partial x^n}(x, t, \lambda) f(t) dt - \frac{\partial^{n-1} K}{\partial x^{n-1}}(x, x-0, \lambda) f(x) \\ &= - \frac{\partial^{n-1} K}{\partial x^{n-1}}(x+0, x, \lambda) f(x) - \int_a^x \frac{\partial^n K}{\partial x^n}(x, t, \lambda) f(t) dt \\ &= - \frac{f(x)}{p_n(x)} - \int_a^x \frac{\partial^n K}{\partial x^n}(x, t, \lambda) f(t) dt, \end{aligned}$$

$$My = -f(x) - \int_a^x MK(x, t, \lambda) f(t) dt$$

$$= -f(x) - \int_a^x \lambda K(x, t, \lambda) f(t) dt$$

$$= -f(x) + \lambda y(x, \lambda),$$

所以

$$\lambda y - My = f.$$

(2) K 不一定满足边界条件, 将它修改一下, 取^①

$$G(x, t, \lambda) = -K(x, t, \lambda) - \sum_{l=1}^n c_l \varphi_l(x, \lambda),$$

其中, c_1, \dots, c_n 是待定的 (t, λ) 的函数, 使得对固定的 $t \in (a, b)$, $G(x, t, \lambda)$ 作为 x 的函数满足

$$\begin{cases} U_j G = 0, & j = 1, \dots, n, \\ \begin{cases} U_j K + \sum_{l=1}^n c_l U_j \varphi_l = 0, \\ j = 1, \dots, n, \end{cases} & t \in (a, b). \end{cases}$$

这是一个 c_1, \dots, c_n 的方程组

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^n c_l U_j \varphi_l = -U_j K, \\ j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad t \in (a, b),$$

这里

$$U_j K = \sum_{l=1}^n \alpha_{jl} K^{(l-1)}(a, t, \lambda) + \sum_{l=1}^n \beta_{jl} K^{(l-1)}(b, t, \lambda).$$

由于 $K^{(l-1)}(a, t, \lambda)$, $K^{(l-1)}(b, t, \lambda)$, $l = 1, \dots, n-1$ 都是 $t \in [a, b]$ 的连续函数, λ 的整函数, $K^{(n-1)}(b, t, \lambda)$ 也在 $t \in [a, b]$ 上连续, 而

$$K^{(n-1)}(a, t, \lambda) = \begin{cases} 0, & a < t \leq b, \\ \frac{1}{p_n(a)}, & t = a. \end{cases}$$

^① 设 $G(x, t, \lambda) = -K + \square$, 则

$$y = - \int_a^b K(\cdot, t, \lambda) f(t) dt + \int_a^b \square f(t) dt.$$

由

$$\begin{aligned} \lambda y - My &= \lambda y + f + \lambda \int_a^b K(\cdot, t, \lambda) f(t) dt - \int_a^b M \square f(t) dt \\ &= f + \int_a^b \lambda \square f(t) dt - \int_a^b M \square f(t) dt \end{aligned}$$

知应有

$$M \square = \lambda \square.$$

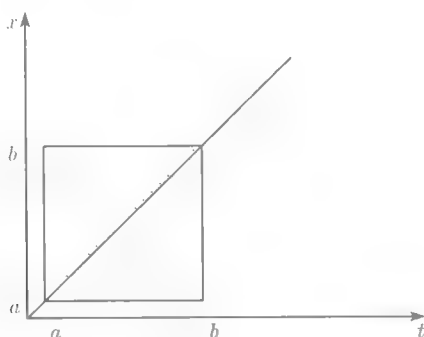


图 2.15

所以 $U_j K, j = 1, \dots, n$ 在 $t \in (a, b)$ 上连续, 它们在 $t \in [a, b]$ 上关于 λ 是整函数, 并且可以把 $U_j K, j = 1, \dots, n$ 延拓成为 $t \in [a, b]$ 上的连续函数, 这样便可以保证 $c_j(t, \lambda)$ 在 $t \in [a, b]$ 上的连续性, 因而不影响 G 及其导数的连续和间断性质. 方程组的行列式 $\Delta = \det(U_j \varphi_l)$ 是 λ 的整函数, 与 t 无关, 所以当 λ 不是特征值时, 解得 $c_1(t, \lambda), \dots, c_n(t, \lambda)$, 它们在 $t \in [a, b]$ 连续, 而关于 λ 解析. 显然, 对固定的 $t \in [a, b]$, 它们是 λ 的半纯函数, 特征值 λ 乃是它们的极点. 这样得到的 $G(x, \lambda, t)$ 显然满足了 (1)~(5).

(3) $\lambda \neq$ 特征值时, 令

$$y(x, \lambda) = \int_a^b G(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

则

$$\begin{aligned} My(x, \lambda) &= -M \int_a^b K(x, t, \lambda) f(t) dt - \sum_{l=1}^n M \int_a^b c_l(t, \lambda) \varphi_l(x, \lambda) f(t) dt \\ &= -f(x) - \lambda \int_a^b K(x, t, \lambda) f(t) dt - \lambda \sum_{l=1}^n \int_a^b c_l(t, \lambda) f(t) dt \cdot \varphi_l(x, \lambda) \\ &= -f(x) + \lambda \int_a^b \left(-K(x, t, \lambda) - \sum_{l=1}^n c_l(t, \lambda) \varphi_l(x, \lambda) \right) f(t) dt \\ &= -f(x) + \lambda y(x, \lambda), \end{aligned}$$

即

$$\lambda y - My = f.$$

另外,

$$U_j y = \int_a^b U_j G(x, t, \lambda) f(t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

因为被积函数在 $t \in (a, b)$ 上为零, 所以即便没有 a, b 两点的信息, 也足以保证积分为零了. 这表示 G 满足 (6).

(4) 证明 G 的唯一性.

假若有两个: G 与 \tilde{G} . 当 $\lambda \neq$ 特征值时, 作为 x 的函数, 由于相减把间断处的跳跃抹去了, 故

$$G - \tilde{G} \in C^{n-1}[a, b],$$

由于 $x \neq t$ 时,

$$M(G - \tilde{G}) = \lambda(G - \tilde{G}),$$

所以 $x \neq t$ 时有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n (G - \tilde{G})}{\partial x^n}(x, t, \lambda) = & \left[\lambda(G - \tilde{G}) - p_{n-1}(x) \frac{\partial^{n-1} (G - \tilde{G})}{\partial x^{n-1}} - \cdots \right. \\ & \left. - p_0(x)(G - \tilde{G}) \right] / p_n(x), \end{aligned}$$

右边在 $x \in [a, b]$ 连续, 故作为 x 的函数

$$G - \tilde{G} \in C^n[a, b].$$

这样, $G - \tilde{G}$ 便是边值问题

$$\begin{cases} My = \lambda y, \\ U_j y = 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

的解, 因为 λ 不是特征值, 所以 $G = \tilde{G}$.

例 2.4.1 设 $M = iD$, $x \in [0, 1]$, T 为 $T_0(M)$ 的自伴延拓,

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid f(0) - f(1) = 0\}.$$

设 $\lambda \neq 0$, 若

$$\begin{cases} M\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(0, \lambda) = 1, \end{cases}$$

则

$$i\varphi' = \lambda\varphi, \quad \varphi' = -i\lambda\varphi, \quad \varphi(x, \lambda) = e^{-i\lambda x}.$$

令

$$K(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{i} e^{-i\lambda(x-t)}, & t \leq x, \\ 0, & t > x, \end{cases}$$

则 $G(x, t, \lambda) = -K(x, t, \lambda) - c\varphi(x, \lambda)$, $G(0, t, \lambda) = -c$, $G(1, t, \lambda) = -\frac{1}{i}e^{-i\lambda(1-t)} - ce^{-i\lambda}$, $G(0) - G(1) = 0$, 即

$$\frac{1}{i}e^{-i\lambda(1-t)} + ce^{-i\lambda} - c = 0,$$

所以

$$c = \frac{-\frac{1}{i}e^{-i\lambda(1-t)}}{e^{-i\lambda} - 1} = -\frac{e^{-i\lambda(1-t)}}{i(e^{-i\lambda} - 1)}.$$

于是

$$\begin{aligned} G(x, t, \lambda) &= \begin{cases} -\frac{1}{i}e^{-i\lambda(x-t)} + \frac{e^{-i\lambda(1-t)-i\lambda x}}{i(e^{-i\lambda} - 1)}, & t \leq x, \\ \frac{e^{-i\lambda(1-t)-i\lambda x}}{i(e^{-i\lambda} - 1)}, & t > x, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{e^{-i\lambda(x-t)}}{i(e^{-i\lambda} - 1)}, & t \leq x, \\ \frac{e^{-i\lambda(x-t+1)}}{i(e^{-i\lambda} - 1)}, & t > x \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{ie^{-i\lambda(x-t-1)}}{e^{i\lambda} - 1}, & t \leq x, \\ \frac{ie^{-i\lambda(x-t)}}{e^{i\lambda} - 1}, & t > x. \end{cases} \end{aligned}$$

注意, 这里 0 是特征值, 对应的特征函数是 1, 所以在 $G(x, t, \lambda)$ 中 $\lambda \neq 0$ 才有确定的定义.

例 2.4.2 设 $M = -D^2$, $x \in [0, 1]$, T 为 $T_0(M)$ 的自伴延拓,

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid f(0) = f(1) = 0\}.$$

当 $\lambda \neq 0$ 时, 由

$$\begin{cases} M\varphi_1 = \lambda\varphi_1, \\ \varphi_1(0, \lambda) = 1, \\ \varphi_1'(0, \lambda) = 0 \end{cases}$$

得 $\varphi_1(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x$; 而由

$$\begin{cases} M\varphi_2 = \lambda\varphi_2, \\ \varphi_2(0, \lambda) = 0, \\ \varphi_2'(0, \lambda) = 1 \end{cases}$$

得 $\varphi_2(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$; 所以 $W(\varphi_1, \varphi_2) = 1$ 且

$$K(x, t, \lambda) = \begin{cases} - \begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} t & \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \\ \cos \sqrt{\lambda} x & \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix}, & t \leq x, \\ 0, & t > x \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}, & t \leq x, \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

若

$$G(x, t, \lambda) = -K(x, t, \lambda) - c_1 \cos \sqrt{\lambda} x - c_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}},$$

则

$$G(0, t, \lambda) = -c_1 = 0, \quad c_1 = 0,$$

$$G(1, t, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} - c_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} = 0, \quad c_2 = \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}}.$$

于是

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sin \sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}, & t \leq x, \\ -\frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t) \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, & t > x. \end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned} & \sin \sqrt{\lambda}(x-t) \sin \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda}(1-t) \sin \sqrt{\lambda} x \\ &= \sin \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} t - \sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} t \\ & \quad - \sin \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} t + \sin \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t \\ &= -\sin \sqrt{\lambda} t \sin \sqrt{\lambda}(1-x), \end{aligned}$$

所以

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-x) \sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, & t \leq x, \\ -\frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t) \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, & t > x. \end{cases}$$

当 $\lambda = 0$ 时 (也可由 $\lambda \neq 0$ 情形取极限 $\lambda \rightarrow 0$ 得), 由

$$\begin{cases} M\varphi_1 = 0, \\ \varphi_1(0, 0) = 1, \\ \varphi_1'(0, 0) = 0 \end{cases}$$

得 $\varphi_1(x, 0) = 1$; 由

$$\begin{cases} M\varphi_2 = 0, \\ \varphi_2(0, 0) = 0, \\ \varphi_2'(0, 0) = 1 \end{cases}$$

得 $\varphi_2(x, 0) = x$; 所以

$$K(x, t, 0) = \begin{cases} - \begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & x \end{vmatrix}, & t \leq x, \\ 0, & t > x \end{cases} = \begin{cases} -(x-t), & t \leq x, \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

设 $G(x, t, 0) = -K(x, t, 0) - c_1 - c_2x$, 则 $0 = G(0, t, 0) = -c_1$, 所以 $c_1 = 0$; 而 $0 = G(1, t, 0) = 1 - t - c_2$, 所以 $c_2 = 1 - t$. 于是

$$G(x, t, 0) = \begin{cases} (x-t) - (1-t)x, & t \leq x, \\ -(1-t)x, & t > x \end{cases} = \begin{cases} -t(1-x), & t \leq x, \\ -x(1-t), & t > x. \end{cases}$$

定理 2.4.3 豫解算子 $R(\lambda, T)$ 的 Green 核 $G(x, t, \lambda)$ 只有简单极点.

证明 $G(x, t, \lambda)$ 是半纯函数, 极点 λ_k 是 T 的特征值, 如果 $G(x, t, \lambda)$ 在 λ_k 有 m 阶极点, $m > 1$, 则

$$G(x, t, \lambda) = \frac{G_m(x, t)}{(\lambda - \lambda_k)^m} + \frac{G_{m-1}(x, t)}{(\lambda - \lambda_k)^{m-1}} + \cdots,$$

其中, $G_m(x, t)$ 不为零. 于是存在 $f \in C[a, b]$, 使得

$$f_m(x) = \int_a^b G_m(x, t) f(t) dt \neq 0,$$

那么

$$y(x, \lambda) = \frac{f_m(x)}{(\lambda - \lambda_k)^m} + \frac{f_{m-1}(x)}{(\lambda - \lambda_k)^{m-1}} + \cdots$$

满足

$$(\lambda I - T)y = f, \quad U_j y = 0, \quad j = 1, \cdots, n.$$

于是

$$(\lambda_k I - T)y = (\lambda_k - \lambda)y + f,$$

$$U_j y = 0, \quad j = 1, \cdots, n,$$

即

$$\frac{(\lambda_k I - T)f_m}{(\lambda - \lambda_k)^m} + \frac{(\lambda_k I - T)f_{m-1}}{(\lambda - \lambda_k)^{m-1}} + \cdots = f - \frac{f_m}{(\lambda - \lambda_k)^{m-1}} - \frac{f_{m-1}}{(\lambda - \lambda_k)^{m-2}} - \cdots.$$

由 Laurent 展开的唯一性知

$$\begin{cases} (\lambda_k I - T)f_m = 0, \\ (\lambda_k I - T)f_{m-1} = f_m, \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} U_j G_m = 0, \\ U_j G_{m-1} = 0, \\ \dots \end{cases} \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\left(0 = U_j G = \frac{U_j G_m}{(\lambda - \lambda_k)^m} + \frac{U_j G_{m-1}}{(\lambda - \lambda_k)^{m-1}} + \dots \right)$$

于是也有

$$\begin{cases} U_j f_m = 0, \\ U_j f_{m-1} = 0, \\ \dots \end{cases} \quad j = 1, \dots, n,$$

这样 $f_m \in \mathcal{D}(T)$, 而

$$\|f_m\|^2 = (f_m, (\lambda_k I - T)f_{m-1}) = ((\lambda_k I - T)f_m, f_{m-1}) = 0,$$

与 $f_m \neq 0$ 矛盾!

虽说 T 的特征值 λ_n 都是 $G(x, t, \lambda)$ 的极点, 但求 λ_n 处的残数并不容易, 所以要想像定理 2.3.2 那样得到核的展开, 得另想办法.

因为 M 是线性的, 如果移动一个实数 α 得 $M_1 = M - \alpha$, M_1 也是正则对称微分算式

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T_1(M_1)) &= \mathcal{D}(T_1(M)), \\ \mathcal{D}(T_0(M_1)) &= \mathcal{D}(T_0(M)), \end{aligned}$$

而 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓的充要条件是 $T_1 = T - \alpha I$ 是 $T_0(M_1)$ 的自伴延拓, 于是 “ λ 是 T 的特征值, φ 是对应的特征函数” 的充要条件是 “ $\lambda_1 = \lambda - \alpha$ 是 T_1 的特征值, φ 是对应的特征函数”. 因此不妨假定 0 不是 T 的特征值, 令

$$\begin{aligned} G(x, t) &= G(x, t, 0), \\ (Gf)(x) &= \int_a^b G(x, t)f(t)dt, \quad f \in L^2[a, b]. \end{aligned}$$

定理 2.4.4 G 是紧自伴算子且 $G(x, t) = \overline{G(t, x)}$.

证明 设 $u, v \in L^2[a, b]$, 因为 $G = R(0, T) = -T^{-1}$, 所以

$$\begin{aligned} f &= Gu \in \mathcal{D}(T), \\ Tf &= TGu = -u, \\ (Gu, v) &= (Gu, -TGv) = (-TGu, Gv) = (u, Gv). \end{aligned}$$

因为 G 的核是连续的, 所以 G 是紧自伴算子. 由于

$$\int_a^b \int_a^b G(x, t) u(t) dt \overline{v(x)} dx = (Gu, v) = (u, Gv) = \int_a^b u(x) \overline{\int_a^b G(x, t) v(t) dt} dx,$$

$$\int_a^b \int_a^b (G(x, t) - \overline{G(t, x)}) u(t) \overline{v(x)} dt dx = 0,$$

利用 $u(t) \overline{v(x)}$ 的线性组合在 $L^2([a, b] \times [a, b])$ 中的稠性, 可得 $G(x, t) = \overline{G(t, x)}$.

定理 2.4.5 $\sigma(T) = \left\{ -\frac{1}{\mu} \mid \mu \in \sigma(G), \mu \neq 0 \right\}$.

注 由于 $\sigma(G)$ 是闭集, 而 G 是紧的自伴算子, 所以 0 将属于 $\sigma(G)$, 但它不是 G 的特征值.

证明 如果 $\lambda \in \sigma(T)$, φ 是相应的特征函数, 则

$$T\varphi = \lambda\varphi, \quad \lambda \neq 0,$$

于是

$$\varphi = G(-T)\varphi = G(-\lambda\varphi), \quad G\varphi = -\frac{1}{\lambda}\varphi, \quad -\frac{1}{\lambda} \in \sigma(G).$$

反过来, 如果 $\mu \in \sigma(G)$, $\mu \neq 0$, ψ 是相应的特征函数,

$$G\psi = \mu\psi,$$

则 $\psi = \frac{1}{\mu}G\psi \in \mathcal{D}(T)$ 且有 $-T\psi = \frac{1}{\mu}(-T)G\psi = \frac{1}{\mu}\psi$, $T\psi = -\frac{1}{\mu}\psi$, $-\frac{1}{\mu} \in \sigma(T)$.

T 是否恰有可数个非零特征值呢? 就看 G 是否一定有可数个非零的特征值.

定理 2.4.6 $\sigma(T) = \{\lambda_n \mid n = 1, 2, \dots\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$.

证明 要证明 G 有可数个非零特征值. G 的绝对值最大的特征值是 $\mu_1 = \|G\|$ 或 $-\|G\|$, 如果相应的规范化特征函数是 $\varphi_1(x)$, 则 φ_1 是条件极值问题 $\sup_{\|y\|=1} |(Gy, y)|$ 的解. 令

$$G_1(x, t) = G(x, t) - \mu_1 \varphi_1(x) \overline{\varphi_1(t)},$$

$$\overline{G_1(t, x)} = \overline{G(t, x)} - \overline{\mu_1 \varphi_1(t) \overline{\varphi_1(x)}} = G_1(x, t),$$

这也是一个对称的 L^2 核, 设对应的紧自伴算子是 G_1 , 那么 $\mu - \|G_1\|$ 或 $-\|G_1\|$ 是它的特征值, 如果相应的规范化特征函数是 $\psi(x)$, 则

$$G_1\psi = \mu\psi,$$

即

$$G\psi - \mu_1(\psi, \varphi_1)\varphi_1 = \mu\psi.$$

故

$$\begin{aligned}\mu(\psi, \varphi_1) &= (G\psi, \varphi_1) - \mu_1(\psi, \varphi_1) \\ &= (\psi, G\varphi_1) - \mu_1(\psi, \varphi_1) = (\psi, \mu_1\varphi_1) - \mu_1(\psi, \varphi_1) = 0, \\ &(\psi, \varphi_1) = 0.\end{aligned}$$

于是

$$G\psi = \mu\psi.$$

令 $\mu_2 = \mu, \varphi_2 = \psi$, 则 φ_2 可以看成是条件极值问题

$$\sup_{\|y\|=1, (y, \varphi_1)=0} |(Gy, y)|$$

的解, 当然

$$|\mu_1| \geq |\mu_2|,$$

这样可以求得 G 的一系列特征值. 如果 G 只有有限个非零特征值, 那么条件极值问题进行有限 m 步以后就停下来, 这表示对称核

$$G_m(x, t) = G(x, t) - \sum_{k=1}^m \mu_k \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(t)},$$

对应的算子 G_m 的模 $\|G_m\| = 0$. 于是对任意的 $f \in L^2[a, b]$, 有

$$0 = G_m f = Gf - \sum_{k=1}^m \mu_k (f, \varphi_k) \varphi_k,$$

即

$$Gf = \sum_{k=1}^m \mu_k (f, \varphi_k) \varphi_k,$$

这样

$$f = -TGf = -\sum_{k=1}^m \mu_k (f, \varphi_k) T\varphi_k = -\sum_{k=1}^m \mu_k (f, \varphi_k) \left(-\frac{1}{\mu_k} \varphi_k\right) = \sum_{k=1}^m (f, \varphi_k) \varphi_k,$$

右边是 $C^n[a, b]$ 的函数, 而 $f \in L^2[a, b]$ 可以任意, 矛盾! 所以 G 必有可数个非零特征值

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \cdots \geq |\mu_n| \geq \cdots.$$

因为 0 是 G 的非零特征值唯一的极限点, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0,$$

因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$.

设 φ_n 是 T 的对应于 λ_n 的规范化特征函数, 下面来证明 $\{\varphi_n | n = 1, 2, \dots\}$ 是 $L^2[a, b]$ 的规范化正交基.

定理 2.4.7 若 $f \in C^n[a, b]$, $U_j f = 0, j = 1, \dots, n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

证明 显然 $f \in \mathcal{D}(T)$, 如果令 $u = -Tf$, 则 f 又可表成 $f = Gu$. 记

$$G_m(x, t) = G(x, t) - \sum_{k=1}^m \mu_k \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(t)}, \mu_k = -\frac{1}{\lambda_k},$$

那么

$$\begin{aligned} \|G_m\| &= |\mu_{m+1}|, \\ \|G_m u\| &= \left\| Gu - \sum_{k=1}^m \mu_k (u, \varphi_k) \varphi_k \right\| \leq |\mu_{m+1}| \|u\|, \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$, 所以这表示在平均收敛的意义下, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (u, \varphi_n) \varphi_n = Gu = f,$$

其中,

$$\text{左式} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\lambda_n} (-Tf, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (f, T\varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n.$$

进一步证明收敛在 $[a, b]$ 上还是一致的: 对于任意的 $u \in L^2[a, b]$,

$$\sum_{k=p}^q \mu_k (u, \varphi_k) \varphi_k = G \left(\sum_{k=p}^q (u, \varphi_k) \varphi_k \right).$$

由于

$$|(Gu)(x)| = \left| \int_a^b G(x, t) u(t) dt \right| \leq \left(\sup_{a \leq x, t \leq b} |G(x, t)| \right) \sqrt{b-a} \|u\|,$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p}^q \mu_k (u, \varphi_k) \varphi_k(x) \right| &\leq \sqrt{b-a} \sup_{a \leq x, t \leq b} |G(x, t)| \left\| \sum_{k=p}^q (u, \varphi_k) \varphi_k \right\| \\ &= \sqrt{b-a} \sup_{a \leq x, t \leq b} |G(x, t)| \left(\sum_{k=p}^q |(u, \varphi_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad p, q \rightarrow \infty \end{aligned}$$

（由于 $\{\varphi_n | n=1, 2, \dots\}$ 是规范正交组, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 \leq \|u\|^2$), 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(u, \varphi_n)$ φ_n 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

定理 2.4.8 $\{\varphi_n | n=1, 2, \dots\}$ 是 $L^2[a, b]$ 的规范正交基.

证明 只需证明对任意的 $f \in L^2[a, b]$, 有 $f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n$ 或 Parseval 等式 $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2$ 成立. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\tilde{f} \in C_0^\infty(a, b)$ 使得

$$\|f - \tilde{f}\| < \varepsilon,$$

$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{f}, \varphi_n) \varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致成立, 所以存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$\left| \tilde{f}(x) - \sum_{k=1}^n (\tilde{f}, \varphi_k) \varphi_k(x) \right| < \varepsilon, \quad x \in [a, b].$$

这样当 $n \geq N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\| &\leq \|f - \tilde{f}\| + \left\| \tilde{f} - \sum_{k=1}^n (\tilde{f}, \varphi_k) \varphi_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^n (\tilde{f} - f, \varphi_k) \varphi_k \right\| \\ &\leq 2\|f - \tilde{f}\| + \left(\int_a^b \left| \tilde{f}(x) - \sum_{k=1}^n (\tilde{f}, \varphi_k) \varphi_k(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon\sqrt{b-a}, \end{aligned}$$

所以

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n.$$

另外由

$$0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |(f, \varphi_k)|^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

得 Parseval 等式.

定理 2.4.9 (Hilbert-Schmidt 核展开定理) 在 $L^2([a, b] \times [a, b])$ 平均收敛的意义下, $G(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(t)}}{-\lambda_n}$.

证明 $\{e_n(x, t) = \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(t)} | n = 1, 2, \dots\}$ 是 $L^2([a, b] \times [a, b])$ 的规范正交组, 由 Bessel 不等式, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (G, e_n)e_n$ 在 $L^2([a, b] \times [a, b])$ 中收敛到某个 S . 而

$$\begin{aligned}(G, e_n) &= \int_a^b \int_a^b G(x, t) \overline{\varphi_n(x) \varphi_n(t)} dx dt = \int_a^b \left(\int_a^b G(x, t) \varphi_n(t) dt \right) \overline{\varphi_n(x)} dx \\ &= \int_a^b \mu_n \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(x)} dx = \mu_n - \frac{1}{\lambda_n},\end{aligned}$$

于是在平均收敛的意义下,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(t)}}{-\lambda_n} = S(x, t).$$

要证明 $S = G$, 为此只需证明在 $L^2([a, b] \times [a, b])$ 的一个稠集合 \mathscr{D} 上, 有

$$(G - S, f) = 0, \quad f \in \mathscr{D}.$$

取

$$\mathscr{D} = \{f = u\bar{v} \text{ 的线性组合} | u, v \in L^2[a, b]\},$$

则

$$\begin{aligned}(S, u\bar{v}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-\lambda_n} \int_a^b \int_a^b \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(t)} \overline{u(x)v(t)} dx dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-\lambda_n} (\varphi_n, u)(v, \varphi_n), \\ (G, u\bar{v}) &= \int_a^b \int_a^b G(x, t) \overline{u(x)v(t)} dx dt = \int_a^b \overline{u(x)} \left(\int_a^b G(x, t) v(t) dt \right) dx \\ &= \int_a^b \overline{u(x)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (Gv, \varphi_n) \varphi_n(x) \right) dx = \int_a^b \overline{u(x)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (v, \varphi_n) \varphi_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (\varphi_n, u)(v, \varphi_n),\end{aligned}$$

所以 $(G - S, u\bar{v}) = 0$.

例 2.4.3 $M = iD$, $x \in [0, 2\pi]$, 设 T 为 $T_0(M)$ 的自伴延拓,

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) | f(0) - f(2\pi) = 0\}.$$

若 $\lambda \in \sigma(T)$, 则

$$iy' = \lambda y, \quad y' = -i\lambda y, \quad y = e^{-i\lambda x}, \quad 1 - e^{i2\pi\lambda} = 0,$$

所以 $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 即 $\sigma(T) = \mathbf{Z}$, 与 $n \in \mathbf{Z}$ 对应的规范化特征函数是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} | n \in \mathbf{Z} \right\}$ 是 $L^2[0, 2\pi]$ 的规范正交基. $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt \right) e^{inx}$, $f \in L^2[0, 2\pi]$ (平均收敛意义下). 如果 f 连续可微, 周期 2π , 则收敛是一致的. 这是 Fourier 级数论中的结论.

第3章 奇型 Sturm-Liouville 算子的谱论

先考虑区间的一端为常型另一端为奇型的情形, 然后再考虑区间两端都是奇型的情形.

3.1 Weyl 圆套

考虑区间为 $[a, \infty)$ 的情形, 其余 $(-\infty, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ 的情形类似. 设

$$M = -DpD + q, \quad x \in [0, \infty),$$

这里 p, q 是实函数, $p > 0$, $p' \in AC_{\text{loc}}[0, \infty)$, $q \in L_{\text{loc}}[0, \infty)$.

$$[f, g](x) = p(x)W(f, \bar{g})(x) = p(x)(f(x)\overline{g'(x)} - f'(x)\overline{g(x)}),$$

假设 $\varphi(x, \lambda)$ 与 $\theta(x, \lambda)$ 分别是下列 Cauchy 问题的解:

$$\begin{cases} My = \lambda y, \\ y(0) = \sin \alpha, \\ p(0)y'(0) = -\cos \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} My = \lambda y, \\ y(0) = \cos \alpha, \\ p(0)y'(0) = \sin \alpha, \end{cases} \quad 0 \leq \alpha < \pi.$$

因为

$$W(\varphi, \theta)(0) = \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\frac{\cos \alpha}{p(0)} & \frac{\sin \alpha}{p(0)} \end{vmatrix} = \frac{1}{p(0)} \neq 0,$$

所以 $\varphi(x, \lambda)$ 与 $\theta(x, \lambda)$ 线性无关. 由 Liouville 公式

$$W(\varphi, \theta)(x) = W(\varphi, \theta)(0)e^{-\int_0^x \frac{p'}{p} dt} = W(\varphi, \theta)(0)\frac{p(0)}{p(x)}$$

得

$$p(x)W(\varphi, \theta)(x) = p(0)W(\varphi, \theta)(0) = 1.$$

方程 $My = \lambda y$ 的解除 θ 外都可以表示成 $y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + m\theta(x, \lambda)$ 的倍数且满足

$$\begin{aligned} y(0) &= \sin \alpha + m \cos \alpha, \\ p(0)y'(0) &= -\cos \alpha + m \sin \alpha. \end{aligned}$$

于是 y 在 0 点满足边条件

$$\cos \alpha y(0) + \sin \alpha p(0)y'(0) = m.$$

考虑方程的那些同时还在点 $b \in (0, \infty)$ 满足边条件

$$\cos \beta y(b) + \sin \beta p(b)y'(b) = 0, \quad 0 \leq \beta < \pi$$

的解,

$$\cos \beta \varphi(b, \lambda) + \sin \beta p(b)\varphi'(b, \lambda) + m(\cos \beta \theta(b, \lambda) + \sin \beta p(b)\theta'(b, \lambda)) = 0.$$

于是

$$m(\lambda) = -\frac{\cos \beta \varphi(b, \lambda) + \sin \beta p(b)\varphi'(b, \lambda)}{\cos \beta \theta(b, \lambda) + \sin \beta p(b)\theta'(b, \lambda)} \\ = \begin{cases} -\frac{\varphi(b, \lambda)}{\theta(b, \lambda)}, & \beta = 0, \\ -\frac{\cot \beta \varphi(b, \lambda) + p(b)\varphi'(b, \lambda)}{\cot \beta \theta(b, \lambda) + p(b)\theta'(b, \lambda)}, & 0 < \beta < \pi. \end{cases}$$

因为 $\varphi(b, \lambda)$ 和 $\theta(b, \lambda)$ 都是 λ 的整函数, 所以 $m(\lambda)$ 是 λ 的半纯函数, 而且

$$\overline{m(\lambda)} = m(\bar{\lambda}).$$

如果 λ 是 $m(\lambda)$ 的极点, 则 $\theta(x, \lambda)$ 满足

$$\begin{cases} My = \lambda y, \\ \sin \alpha y(0) - \cos \alpha p(0)y'(0) = 0, \\ \cos \beta y(b) + \sin \beta p(b)y'(b) = 0. \end{cases}$$

如果记算子 T 为

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ y \in \mathcal{D}(T_1(M)) \left| \begin{array}{l} \sin \alpha y(0) - \cos \alpha p(0)y'(0) = 0, \\ \cos \beta y(b) + \sin \beta p(b)y'(b) = 0 \end{array} \right. \right\}, \\ Ty = My, \quad y \in \mathcal{D}(T),$$

则 λ 是 $T_0(M|_{[0,b]})$ 的自伴延拓 T 的特征值, 因此 λ 是实的! 所以只要 $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, $m(\lambda)$ 就是确定的. 令

$$A = \varphi(b, \lambda), \quad B = p(b)\varphi'(b, \lambda), \quad C = \theta(b, \lambda), \quad D = p(b)\theta'(b, \lambda),$$

因为

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = p(b)W(\varphi, \theta)(b) = 1,$$

所以 $m = -\frac{Az+B}{Cz+D}$ 是一个分式线性变换, 它把 z 平面上的直线与圆变成 m 平面上的直线或圆. 当 β 从 0 变到 π 时, $z = \cot \beta$ 跑遍了实轴, 那么这个变换将实轴变成了什么? 知道分式线性变换把互相对称的点对仍然映成互相对称的点对^①.

定理 3.1.1 如果 $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, 实轴在分式线性变换 $m = -\frac{Az+B}{Cz+D}$ 下的像是 m 平面上的圆 C_b .

(1) C_b 方程是

$$[\varphi + m\theta, \varphi + m\theta](b) = 0$$

或

$$\int_0^b |\varphi(x, \lambda) + m\theta(x, \lambda)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} \lambda};$$

$$(2) C_b \text{ 的圆心为 } m_{b0} = -\frac{[\varphi, \theta](b)}{[\theta, \theta](b)};$$

$$(3) C_b \text{ 的半径为 } r_b = \frac{1}{|[\theta, \theta](b)|} = \frac{1}{2|\operatorname{Im} \lambda| \int_0^b |\theta(x, \lambda)|^2 dx};$$

$$(4) m \text{ 在 } C_b \text{ 内的充要条件是 } \int_0^b |\varphi(x, \lambda) + m\theta(x, \lambda)|^2 dx < \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} \lambda}.$$

证明

$$0 = \int_0^b (M\theta - \lambda\theta) \bar{\theta} dx = -p\theta'\bar{\theta}|_0^b + \int_0^b p|\theta'|^2 dx + \int_0^b (q - \lambda)|\theta|^2 dx,$$

因为 $\theta(0, \lambda), \theta'(0, \lambda), p, q$ 都是实的, 所以由上式可得

$$\operatorname{Im}(-p(b)\theta'(b, \lambda)\overline{\theta(b, \lambda)}) = \operatorname{Im} \lambda \int_0^b |\theta|^2 dx \neq 0.$$

于是 $\theta(b, \lambda) \neq 0$, 而且

$$\operatorname{Im} \left(-\frac{p(b)\theta'(b, \lambda)}{\theta(b, \lambda)} \right) = \operatorname{Im} \left(-\frac{p(b)\theta'(b, \lambda)\overline{\theta(b, \lambda)}}{|\theta(b, \lambda)|^2} \right) \neq 0,$$

即 $-\frac{D}{C}$ 不是实数. 这样, 分式线性变换 $m = -\frac{Az+B}{Cz+D}$ 便把非实数的点 $z_\infty = -\frac{D}{C}$ 映成了 m 平面的无穷远点, 因此实轴的像是一个圆 C_b (图 3.1).

(1) C_b 的方程

^① 称 m_1, m_2 关于 $|m - m_0| = r$ 对称, 若 $|m_1 - m_0||m_2 - m_0| = r^2$ 且 $\arg(m_1 - m_0) = \arg(m_2 - m_0)$. 规定 m_0 与无穷远点关于 $|m - m_0| = r$ 对称.

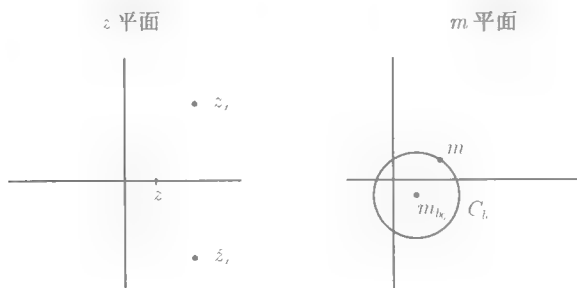


图 3.1

$$m = -\frac{Az + B}{Cz + D}, \quad z = -\frac{Dm + B}{Cm + A},$$

对 $z \in \mathbf{R}$, 有

$$-\frac{Dm + B}{Cm + A} = -\frac{\overline{Dm + B}}{\overline{Cm + A}},$$

$$(\overline{Cm + A})(Dm + B) = (\overline{Dm + B})(Cm + A),$$

$$(\overline{CD} - C\overline{D})m\overline{m} + (B\overline{C} - A\overline{D})\overline{m} + (\overline{AD} - \overline{BC})m + (\overline{AB} - A\overline{B}) = 0,$$

这就是 C_b 的方程. 显然

$$\begin{aligned} \overline{CD} - C\overline{D} &= p(b)\overline{\theta(b, \lambda)}\theta'(b, \lambda) - p(b)\theta(b, \lambda)\overline{\theta'(b, \lambda)} \\ &= -p(b)W(\theta, \overline{\theta})(b) = -[\theta, \theta](b), \end{aligned}$$

$$B\overline{C} - A\overline{D} = -[\varphi, \theta](b),$$

$$\begin{aligned} \overline{AD} - \overline{BC} &= p(b)\overline{\varphi(b, \lambda)}\theta'(b, \lambda) - p(b)\overline{\varphi'(b, \lambda)}\theta(b, \lambda) \\ &= -p(b)W(\theta, \overline{\varphi})(b) = -[\theta, \varphi](b), \end{aligned}$$

$$\overline{AB} - A\overline{B} = -[\varphi, \varphi](b),$$

这样便有

$$-[\theta, \theta](b)m\overline{m} - [\varphi, \theta](b)\overline{m} - [\theta, \varphi](b)m - [\varphi, \varphi](b) = 0,$$

即

$$[\varphi + m\theta, \varphi + m\theta](b) = 0$$

或

$$[y, y](b) = 0.$$

利用 Green 公式则有

$$\int_0^b (\overline{y}My - y\overline{M}y)dx = [y, y]_0^b,$$

即

$$[y, y](b) = [y, y](0) + (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^b |y|^2 dx.$$

而

$$\begin{aligned} [y, y](0) &= [\varphi + m\theta, \varphi + m\theta](0) = [\varphi, \varphi](0) + m[\theta, \varphi](0) + \bar{m}[\varphi, \theta](0) + |m|^2 [\theta, \theta](0) \\ &= mp(0)W(\theta, \bar{\varphi})(0) + \bar{m}p(0)W(\varphi, \bar{\theta})(0) \\ &= -m + \bar{m} = -2i\operatorname{Im}m, \end{aligned}$$

故 C_b 的方程是

$$\int_0^b |\varphi(x, \lambda) + m\theta(x, \lambda)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im}m}{\operatorname{Im}\lambda}.$$

(2) C_b 的圆心.

把 C_b 的原始方程与圆方程 $|m - m_{b0}| = r_b$, 即 $(m - m_{b0})(\bar{m} - \bar{m}_{b0}) = r_b^2$ 作比较得

$$m_{b0} = \frac{A\bar{D} - B\bar{C}}{\bar{C}D - C\bar{D}} = \frac{-[\theta, \varphi](b)}{-[\theta, \theta](b)} = -\frac{[\varphi, \theta](b)}{[\theta, \theta](b)} \quad ①$$

(3) C_b 的半径.

$z = 0$ 的像在 C_b 上, 即 $-\frac{B}{D} \in C_b$, 所以

$$r_b = \left| -\frac{B}{D} - \frac{A\bar{D} - B\bar{C}}{\bar{C}D - C\bar{D}} \right| = \left| \frac{AD - BC}{\bar{C}D - C\bar{D}} \right|.$$

因为

$$AD - BC = p(b)W(\varphi, \theta)(b) = 1,$$

故

$$r_b = \frac{1}{|\bar{C}D - C\bar{D}|} = \frac{1}{|[\theta, \theta](b)|}.$$

由 Green 公式得

$$\int_0^b (\bar{\theta}M\theta - \theta\bar{M}\bar{\theta})dx = [\theta, \theta] \Big|_0^b = [\theta, \theta](b),$$

而

$$\text{左式} = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^b |\theta|^2 dx = 2i\operatorname{Im}\lambda \int_0^b |\theta|^2 dx,$$

① 由于分式线性变换把对称点映成对称点, 而它把 z_∞ 映成无穷远点, 所以 $m_{b0} = -\frac{A\bar{z}_\infty + B}{Cz_\infty + D} = \frac{A\bar{D} - B\bar{C}}{\bar{C}D - C\bar{D}}, \bar{z}_\infty = -\frac{\bar{D}}{\bar{C}}.$

于是

$$r_b = \frac{1}{2|\operatorname{Im}\lambda| \int_0^b |\theta(x, \lambda)|^2 dx}.$$

(4) m 在 C_b 内的充要条件.

C_b 的方程是

$$\int_0^b |\varphi(x, \lambda) + m\theta(x, \lambda)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im}m}{\operatorname{Im}\lambda},$$

即

$$m\bar{m} \int_0^b |\theta|^2 dx + m \int_0^b \bar{\varphi}\theta dx + \bar{m} \int_0^b \varphi\bar{\theta} dx + \int_0^b |\varphi|^2 dx = \frac{\operatorname{Im}m}{\operatorname{Im}\lambda},$$

对比 $|m - m_{b0}| = r_b$ 可知

$$\begin{aligned} & m \text{ 在 } C_b \text{ 内} \\ \Leftrightarrow & |m - m_{b0}| < r_b \Leftrightarrow |m - m_{b0}|^2 < r_b^2 \\ \Leftrightarrow & m\bar{m} - m\bar{m}_{b0} - \bar{m}m_{b0} + m_{b0}\bar{m}_{b0} - r_b^2 < 0, \end{aligned}$$

于是 m 在 C_b 内 $\Leftrightarrow \int_0^b |\varphi(x, \lambda) + m\theta(x, \lambda)|^2 dx < \frac{\operatorname{Im}m}{\operatorname{Im}\lambda}$.

定理 3.1.2 如果 $b' > b$, 则 $C_{b'} \subset C_b$, 所以 $\{C_b | b > 0\}$ 组成了 m 平面里的圆套.

证明 由

$$m \text{ 在 } C_b \text{ 内} \Leftrightarrow \int_0^b |\varphi(x, \lambda) + m\theta(x, \lambda)|^2 dx < \frac{\operatorname{Im}m}{\operatorname{Im}\lambda}$$

可得.

得到了 $My = \lambda y$ 当 $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ 时的两个线性无关的解,

$$\theta(x, \lambda), y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + m(\lambda)\theta(x, \lambda), \quad m(\lambda) \in C_b(\lambda),$$

这里 $\theta(x, \lambda)$ 满足边条件

$$\sin \alpha y(0) - \cos \alpha p(0)y'(0) = 0, \quad \alpha \in [0, \pi),$$

而 $y(x, \lambda)$ 满足边条件

$$\cos \beta y(b) + \sin \beta p(b)y'(b) = 0, \quad \beta \in [0, \pi),$$

随着 $m(\lambda)$ 取遍 C_b , β 将取遍 $[0, \pi)$.

3.2 Weyl 极限点与极限圆

根据 1.3 节, Sturm-Liouville 微分算子 $T_0(M)$ 的亏指数只可能是 $(1, 1)$ 和 $(2, 2)$. $My = \lambda y (\text{Im} \lambda \neq 0)$ 的解都可以表示成 $\theta(x, \lambda)$ 和 $\varphi(x, \lambda) + m(\lambda)\theta(x, \lambda)$, $m \in C_b$ 的线性组合. 要考察这些解, 看看属于 $L^2[0, \infty)$ 的究竟有几个? 根据定理 3.1.2, $\{C_b | b > 0\}$ 是一个圆套, 半径 r_b 是 b 严格下降函数 $\left(r_b = \frac{1}{2|\text{Im} \lambda| \int_0^b |\theta(x, \lambda)|^2 dx}\right)$,

当 $b \rightarrow \infty$ 时, 它趋于一个非负的极限. 这样便产生了两种情形:

极限值 > 0 , 圆套收缩成一个“圆” C_∞ 连同内部 $= \bigcap_{b>0} (C_b \text{ 连同内部})$;

极限值 $= 0$, 圆套收缩成一个点 m_∞ .

在第 1 种情形,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} r_b = r_\infty > 0, \quad \text{即} \quad \frac{1}{2|\text{Im} \lambda| \int_0^\infty |\theta(x, \lambda)|^2 dx} = r_\infty,$$

所以

$$\int_0^\infty |\theta(x, \lambda)|^2 dx = \frac{1}{2|\text{Im} \lambda| r_\infty},$$

即 $\theta \in L^2[0, \infty)$. 如果 \hat{m}_∞ 是 C_∞ 上的一点, 则对一切 $b > 0$ 都有 \hat{m}_∞ 在 C_b 内. 因此

$$\int_0^b |\varphi(x, \lambda) + \hat{m}_\infty \theta(x, \lambda)|^2 dx < \frac{\text{Im} \hat{m}_\infty}{\text{Im} \lambda}, \quad b > 0,$$

所以

$$\varphi + \hat{m}_\infty \theta \in L^2[0, \infty),$$

从而 $\varphi \in L^2[0, \infty)$. 这样 $My = \lambda y$ 的一切解便都平方可积.

对第 2 种情形,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} r_b = 0,$$

所以

$$\int_0^\infty |\theta(x, \lambda)|^2 dx = \infty,$$

即 $\theta \notin L^2[0, \infty)$, 由于 m_∞ 在所有的圆 C_b ($b > 0$) 内, 所以

$$\varphi + m_\infty \theta \in L^2[0, \infty),$$

于是 $My = \lambda y$ 的两个线性无关解中有一个属于 $L^2[0, \infty)$, 而另一个不属于 $L^2[0, \infty)$.

总结一下, 得到下述定理:

定理 3.2.1 设 $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, φ, θ 是 $My = \lambda y$ 的满足初始条件

$$\begin{cases} \varphi(0, \lambda) = \sin \alpha, \\ p(0)\varphi'(0, \lambda) = -\cos \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta(0, \lambda) = \cos \alpha, \\ p(0)\theta'(0, \lambda) = \sin \alpha, \end{cases} \quad 0 \leq \alpha < \pi$$

的两个线性无关的解, 则 $b \rightarrow \infty$ 时, C_b 收缩成一个圆 C_∞ 或点 m_∞ .

(1) C_∞ 情形: $My = \lambda y$ 的一切解均属于 $L^2[0, \infty)$,

$$\widehat{m}_\infty \in C_\infty \Leftrightarrow \int_0^\infty |\varphi + \widehat{m}_\infty \theta|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} \widehat{m}_\infty}{\operatorname{Im} \lambda},$$

后者即 $[\varphi + \widehat{m}_\infty \theta, \varphi + \widehat{m}_\infty \theta](\infty) = 0$, 这是一个圆的方程.

(2) m_∞ 情形: $My = \lambda y$ 仅有一个线性无关解,

$$\varphi + m_\infty \theta \in L^2[0, \infty); \quad m_\infty = -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\varphi(b, \lambda)}{\theta(b, \lambda)}.$$

证明 (1) $\widehat{m}_\infty \in C_\infty \Leftrightarrow \exists b_n \uparrow \infty, m_{b_n} \in C_{b_n}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{b_n} = \widehat{m}_\infty$, 故由

$$\int_0^{b_n} |\varphi + m_{b_n} \theta|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} m_{b_n}}{\operatorname{Im} \lambda},$$

$$\int_0^{b_n} |\varphi|^2 dx + m_{b_n} \int_0^{b_n} \theta \bar{\varphi} dx + \overline{m_{b_n}} \int_0^{b_n} \varphi \bar{\theta} dx + |m_{b_n}|^2 \int_0^{b_n} |\theta|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} m_{b_n}}{\operatorname{Im} \lambda}$$

得

$$\int_0^\infty |\varphi + \widehat{m}_\infty \theta|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} \widehat{m}_\infty}{\operatorname{Im} \lambda}.$$

后者便是 C_∞ 的方程.

(2) 对任意的 $m_b \in C_b$ 都有 $\lim_{b \rightarrow \infty} m_b = m_\infty$. 特别地取 $\beta = 0$ 得 $m_b = -\frac{\varphi(b, \lambda)}{\theta(b, \lambda)}$,

故 $m_\infty = -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\varphi(b, \lambda)}{\theta(b, \lambda)}$.

联系到亏指数的定义, 这表示 $d_+, d_- = 1$ 或 2 , 不可能是 0 .

定理 3.2.2 如果对某个 λ_0 , 方程 $My = \lambda_0 y$ 的一切解均属于 $L^2[0, \infty)$, 则对于任何 $\lambda \in C$, $My = \lambda y$ 的一切解也都属于 $L^2[0, \infty)$.

证明 设 $u_1(x), u_2(x)$ 是 $My = \lambda_0 y$ 的两个线性无关的属于 $L^2[0, \infty)$ 的解, 适当乘 u_1, u_2 以常数, 可以假定

$$p(0)W(u_1, u_2)(0) = 1.$$

于是由 Liouville 公式,

$$p(x)W(u_1, u_2)(x) = 1, \quad x \in [0, \infty).$$

设 v 是 $My = \lambda y$ 的一个解, 将 $Mv = \lambda v$ 改写为

$$Mv - \lambda_0 v = (\lambda - \lambda_0)v,$$

用常数变易法解此非齐次方程, 令

$$v(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x),$$

则由联立方程

$$\begin{cases} c'_1(x)u_1(x) + c'_2(x)u_2(x) = 0, \\ p(x)(c'_1(x)u'_1(x) + c'_2(x)u'_2(x)) = -(\lambda - \lambda_0)v(x), \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} c'_1(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2(x) \\ -(\lambda - \lambda_0)v(x) & u'_2(x) \end{vmatrix}}{p(x)W(u_1, u_2)(x)} = (\lambda - \lambda_0)u_2(x)v(x), \\ c'_2(x) &= \begin{vmatrix} u_1(x) & 0 \\ u'_1(x) & -(\lambda - \lambda_0)v(x) \end{vmatrix} = -(\lambda - \lambda_0)u_1(x)v(x). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int_a^x (\lambda - \lambda_0)u_2(t)v(t)dt + c_1, \\ c_2(x) &= -\int_a^x (\lambda - \lambda_0)u_1(t)v(t)dt + c_2, \end{aligned}$$

其中, $a \in [0, \infty)$. 这样对 $x \in [a, \infty)$ 便有

$$v(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + (\lambda - \lambda_0) \int_a^x (u_1(x)u_2(t) - u_1(t)u_2(x))v(t)dt.$$

记

$$\|v\|(x) = \left(\int_a^x |v(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

由于 $u_1, u_2 \in L^2[0, \infty)$, $M_a = \max \left\{ \left(\int_a^\infty |u_1(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\int_a^\infty |u_2(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\} < \infty$,

于是

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x (u_1(x)u_2(t) - u_1(t)u_2(x))v(t)dt \right| &\leq \int_a^x (|u_1(x)||u_2(t)| + |u_1(t)||u_2(x)|)|v(t)|dt \\ &\leq (|u_1(x)||u_2\|(x) + \|u_1\|(x)|u_2(x)|)\|v\|(x) \\ &\leq M_a(|u_1(x)| + |u_2(x)|)\|v\|(x). \end{aligned}$$

特别地, 对任意的 $T > 0, x \in [a, T]$,

$$\text{上式} \leq M_a(|u_1(x)| + |u_2(x)|)\|v\|(T).$$

这样

$$\begin{aligned} \|v\|(x) &\leq |c_1| \|u_1\|(x) + |c_2| \|u_2\|(x) + |\lambda - \lambda_0| M_a \|v\|(T) \left(\int_a^x (|u_1(t)| + |u_2(t)|)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (|c_1| + |c_2|) M_a + (\lambda - \lambda_0) M_a \|v\|(T) \left(2 \int_a^x |u_1(t)|^2 dt + 2 \int_a^x |u_2(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (|c_1| + |c_2|) M_a + 2|\lambda - \lambda_0| M_a^2 \|v\|(T), \quad \forall x \in [a, T], \end{aligned}$$

所以

$$\|v\|(T) \leq (|c_1| + |c_2|) M_a + 2|\lambda - \lambda_0| M_a^2 \|v\|(T),$$

若取 a 充分大, 使得

$$|\lambda - \lambda_0| M_a^2 < \frac{1}{4},$$

则得

$$\|v\|(T) \leq 2(|c_1| + |c_2|) M_a,$$

T 任意, 所以 $v \in L^2[0, \infty)$.

定义 3.2.1 M 称为在 ∞ 处是极限圆的, 如果有 $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ 使得方程 $My = \lambda_0 y$ 的一切解都属于 $L^2[0, \infty)$, 否则称 M 在 ∞ 处是极限点的.

定理 3.2.2 表明 M 的极限圆, 极限点分类与 $\lambda \in \mathbf{C}$ 无关, 是方程的系数唯一确定的.

推论 3.2.1 以下各条等价:

- (1) M 在 ∞ 是极限圆的;
- (2) $My = 0$ 的一切解均平方可积;
- (3) $T_0(M)$ 的亏指数为 $(2, 2)$.

推论 3.2.2 以下各条等价:

- (1) M 在 ∞ 是极限点的;
- (2) $My = 0$ 至少有一个平方不可积的解;
- (3) $T_0(M)$ 的亏指数为 $(1, 1)$.

例 3.2.1 $M = -D^2, x \in [0, \infty)$.

因为 $-y'' = 0$ 的基本解组 $\{1, x\}$ 都平方不可积, 所以 $T_0(M)$ 的亏指数为 $(1, 1)$. 而 M 在 ∞ 是极限点的.

找出 Sturm-Liouville 微分算式 M 是极限圆或极限点其系数 p, q 所满足的充要条件, 这是微分算子谱理论的一个基本问题, 迄今未得解决. 3.3 节再回到这一问题.

推论 3.2.3 设 G 是 λ 平面上的有界区域, 如果存在 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, 使得 $My = \lambda_0 y$ 有两个线性无关的平方可积解 φ_0 和 θ_0 , 则 $My = \lambda y$ 的任何解 $y(x, \lambda)$ 满足 $\|y(\cdot, \lambda)\|$ 在 G 上一致有界.

证明 适当乘以常数, 可以假定 φ_0 和 θ_0 满足

$$p(x)W(\varphi_0, \theta_0)(x) = 1.$$

设 y 为方程 $My = \lambda y$ 的一个解, 由常数变易法可得 y 的具体形式

$$y(x, \lambda) = c_1 \varphi_0(x, \lambda_0) + c_2 \theta_0(x, \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \int_a^x (\varphi_0(x, \lambda_0) \theta_0(t, \lambda_0) - \varphi_0(t, \lambda_0) \theta_0(x, \lambda_0)) y(t, \lambda) dt, \quad a \in [0, \infty).$$

记

$$\|y\|(x, \lambda) = \left(\int_a^x |y(t, \lambda)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$M_a = \max \left\{ \left(\int_a^\infty |\varphi_0(x, \lambda_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\int_a^\infty |\theta_0(x, \lambda_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

则

$$\|y\|(x, \lambda) \leq 2(|c_1| + |c_2|)M_a.$$

所以

$$\left(\int_a^\infty |y(t, \lambda)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2(|c_1| + |c_2|)M_a.$$

由于

$$\begin{cases} y(a, \lambda) = c_1 \varphi_0(a, \lambda_0) + c_2 \theta_0(a, \lambda_0), \\ y'(a, \lambda) = c_1 \varphi_0'(a, \lambda_0) + c_2 \theta_0'(a, \lambda_0), \end{cases}$$

故

$$c_1(\lambda) = \begin{vmatrix} y(a, \lambda) & \theta_0(a, \lambda_0) \\ p(a)y'(a, \lambda) & p(a)\theta_0'(a, \lambda_0) \end{vmatrix},$$

$$c_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi_0(a, \lambda_0) & y(a, \lambda) \\ p(a)\varphi_0'(a, \lambda_0) & p(a)y'(a, \lambda) \end{vmatrix}$$

都是 λ 的整函数, 在 G 上一致有界. 于是

$$\|y(\cdot, \lambda)\|^2 = \int_0^a |y(t, \lambda)|^2 dt + \int_a^\infty |y(t, \lambda)|^2 dt$$

也在 G 上一致有界.

3.3 Weyl 点, 圆的判别

正如在前面讲到的, 亏指数问题跟微分方程定解问题的适定性有很大关系, 所以亏指数的判定一直是常微分算子谱论的一个重要内容.

自 1910 年 H. Weyl 的博士论文发表以来, 关于 Sturm-Liouville 算子

$$M = -DpD + q, \quad x \in [a, \infty), \quad p > 0 \text{ 连续可微}, q \text{ 连续}$$

亏指数判别的研究积累了大量的文献. 特别是 20 世纪 70 年代, 得到很多形式的充分判别原则, 有人曾夸张地说几乎一切能到手的这类算子都能用现有的判别法去判别它们. 但是这方面的工作并没有停止, 因为即便是对这个简单的微分算子, 也还没有极限点情形系数所满足的充分必要条件.

由 H. Weyl 著名的点圆分类定理知道, 如果存在某个复数 λ_0 , 使得方程 $My = \lambda_0 y$ 的一切解都在 $[a, \infty)$ 上可积, 那么对任何复数 λ 方程 $My = \lambda y$ 的一切解也都是平方可积的. 因此为了判别 M 究竟是属于极限点还是极限圆, 只需检验方程 $My = 0$ 解的平方可积性质即可. 这样便马上得到一个重要的结论.

定理 3.3.1 M 是极限点的充分必要条件是方程 $My = 0$ 至少有一个不平方可积的解.

几乎所有的极限点判别原则都是从它出发去考虑的. 其中, 最简单的一个是

定理 3.3.2 如果 q 非负, 则 M 是极限点的.

证明 设 y 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} My = 0, \\ y(a) = 0, \quad y'(a) = 1 \end{cases}$$

的解, 如果 y 在 (a, ∞) 上还有零点, 由连续性和 $y'(a) > 0$, 必存在一个最小的零点 $b > a$. 于是 y 在 (a, b) 上大于零且存在 $c \in (a, b)$, 使得 $y'(c) = 0$. 这样通过在 $[a, c]$ 上积分

$$\int_a^c (py')' dx = \int_a^c qy dx,$$

应有

$$p(c)y'(c) = p(a)y'(a) + \int_a^c qy dx \geq p(a) > 0,$$

与 $y'(c) = 0$ 矛盾, 所以 y 在 (a, ∞) 上永远是正的. 不仅如此, 还得到 y' 在整个 (a, ∞) 上也是正的, 否则 y' 在 (a, ∞) 将有一零点 c . 同样地, 在 $[a, c]$ 上取积分也要导致矛盾. 由于 y 和 y' 都在 (a, ∞) 上大于零, 所以 y 不平方可积, 因此 M 是极限点的.

推论 3.3.1 (Weyl) 如果 q 有下界, 则 M 是极限点的.

证明 利用定理 1.2.2 可得.

以下考虑 q 没有下界的情形. 为了使 M 是极限点的, 必须对 q 趋于 $-\infty$ 的速度加以某些限制. 这种限制可以通过积分的收敛, 通过 q 属于什么样的空间 $L^p[a, \infty)$ 来实现, 下面是一个 40 年代得到的结果.

定理 3.3.3 (Putnam) 若 $q \in L^2[a, \infty)$, 则 M 是极限点的.

证明 如果 y 是 $My = 0$ 平方可积的解, 则 qy 是可积的. 于是由

$$p(x)y'(x) = p(a)y'(a) + \int_a^x qy dt$$

可知极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)y'(x)$ 存在.

假设 u 和 v 是方程 $My = 0$ 满足 $p(a)[u'(a)v(a) - u(a)v'(a)] = 1$ 的两个线性无关的解, 因为 $[p(u'v - uv')]' = 0$, 所以

$$p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)] = 1.$$

如果 u, v 都平方可积, 则由

$$1 = |p(u'v - uv')| \leq |pu'| |v| + |u| |pv'| \leq K(|u| + |v|)$$

将导致矛盾, 故 u, v 中至少有一个不平方可积, 因此 M 是极限点的.

推论 3.3.2 如果 $q \in L^\alpha[a, \infty)$, $\alpha \geq 2$, 则 M 是极限点的.

证明 令

$$q_1(x) = \begin{cases} 1, & q(x) > 1, \\ q(x), & |q(x)| \leq 1, \\ -1, & q(x) < -1. \end{cases}$$

显然 $q_1(x)$ 是有界连续的, 而 $q_2 = q - q_1$ 满足

$$\begin{aligned} \int_a^\infty |q_2(x)|^2 dx &= \int_{q(x) > 1} |q(x) - 1|^2 dx + \int_{q(x) < -1} |q(x) + 1|^2 dx \\ &\leq 4 \int_a^\infty |q(x)|^\alpha dx < \infty, \end{aligned}$$

所以由定理 3.3.3 与定理 1.2.2 知 M 是极限点的.

实际上, 如果把 $q(x)$ 分解成正部 $q_+(x)$ 与负部 $q_-(x)$ 的代数和 $q_+(x) - q_-(x)$, 其中,

$$q_+(x) = \max\{q(x), 0\}, \quad q_-(x) = \max\{-q(x), 0\}.$$

要考虑的只是 $q_-(x)$ 增长的速度, Weyl 推论现在可以写成: 若 $q_- \in L^\infty[a, \infty)$, 则 M 是极限点的. 1974 年 W. T. Patula 与 P. Waltman 证明了: 若 $q \in L^2[a, \infty)$, 则

M 是极限点的. 在附加一点对 p 的限制后他们证明了当 $q_- \in L^\alpha[a, \infty)$, $\alpha \geq 1$ 时, M 也是极限点的. 人们猜测即使不附加对 p 的限制, 结论也可能是对的, 但至今问题未见解决.

下面证明一条较为精细的判别原则, 它可以用来研究某些二阶 Sturm-Liouville 算子, 其 $q(x)$ 可以振荡, 在一串子区间上取很大的负值, 而且它还可以用来概括众多的判别原则, 这是 1949 年著名的 N. Levinson 判别准则技巧的发展.

定理 3.3.4 (Read) 假设存在 $[a, \infty)$ 上非负的局部绝对连续函数 $w(x)$ 和分解式 $q(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)$, 使得

(1) $q_1 \geq 0$ 且对于某个正数 δ 有常数 K , 使 $(1 + \delta)pw'^2 - q_1w^2 \leq K$ ①;

(2) $-q_2w^2 \leq K$;

(3) 有 d ($0 \leq d \leq 1$), 使 $w^d p^{-\frac{1}{2}}|Q| \leq K$, 其中, $Q' = q_3w^{1-d}$;

(4) $\int_a^\infty w^2 \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \infty$,

则 M 为极限点的.

证明 首先证明如果 y 是 $My = 0$ 的一个平方可积的解, 则积分 $\int_a^\infty (py'^2 + q_1y^2)w^2 dx$ 收敛. 因为

$$-(py')'yw^2 + (q_1 + q_2 + q_3)y^2w^2 = 0,$$

所以

$$-\int_a^x (py')'yw^2 dt + \int_a^x (q_1 + q_2 + q_3)y^2w^2 dt = 0,$$

而

$$-\int_a^x (py')'yw^2 dt = -py'yw^2|_a^x + \int_a^x (py')(y'w^2 + 2yww')dt,$$

故

$$\int_a^x (py'^2 + q_1y^2)w^2 dt = py'yw^2|_a^x - 2 \int_a^x py' yww' dt - \int_a^x (q_2 + q_3)y^2w^2 dt.$$

现在来估计上式的右端. 取 $\theta < 1$ 使得 $(1 + \delta)\theta > 1$, 再取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. 使得

$$K_1 = \frac{1}{(1 + \delta)\theta} + \varepsilon_1 = \theta + \frac{\varepsilon_2}{2(1 + \delta)} < 1.$$

利用 Cauchy 不等式与不等式 $2\alpha\beta \leq \eta\alpha^2 + \frac{1}{\eta}\beta^2$ 可得

$$\begin{aligned} -2 \int_a^x py' yww' dt &\leq 2 \left(\int_a^x py'^2 w^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^x py^2 w'^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{(1 + \delta)\theta} \int_a^x py'^2 w^2 dt + (1 + \delta)\theta \int_a^x py^2 w'^2 dt. \end{aligned}$$

① 不等式在除去一个零测集以外的点上都成立.

而

$$\begin{aligned} -\int_a^x q_3 y^2 w^2 dt &= -\int_a^x q_3 w^{1-d} y^2 w^{1+d} dt \\ &= -Q y^2 w^{1+d} \Big|_a^x + \int_a^x Q [2yy' w^{1+d} + (1+d)y^2 w^d w'] dt, \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} \int_a^x Q 2yy' w^{1+d} dt &\leq 2 \int_a^x w^d p^{-\frac{1}{2}} |Q| p^{\frac{1}{2}} |yy'| w dt \leq 2K \int_a^x p^{\frac{1}{2}} |yy'| w dt \\ &\leq \varepsilon_1 \int_a^x p y'^2 w^2 dt + \frac{K^2}{\varepsilon_1} \int_a^x y^2 dt, \\ (1+d) \int_a^x Q y^2 w^d w' dt &\leq (1+d) \int_a^x w^d p^{-\frac{1}{2}} |Q| p^{\frac{1}{2}} y^2 |w'| dt \leq (1+d)K \int_a^x p^{\frac{1}{2}} y^2 |w'| dt \\ &\leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_a^x p y^2 w'^2 dt + \frac{(1+d)^2 K^2}{2\varepsilon_2} \int_a^x y^2 dt, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_a^x (p y'^2 + q_1 y^2) w^2 dt &\leq (p y' y w^2 - Q y^2 w^{1+d}) \Big|_a^x - \int_a^x q_2 y^2 w^2 dt + K_1 \int_a^x p y'^2 w^2 dt \\ &\quad + (1+\delta) K_1 \int_a^x p y^2 w'^2 dt + \left[\frac{K^2}{\varepsilon_1} + \frac{(1+d)^2 K^2}{2\varepsilon_2} \right] \int_a^x y^2 dt. \end{aligned}$$

于是由条件 (1) 与 (2) 可得

$$\begin{aligned} (1-K_1) \int_a^x (p y'^2 + q_1 y^2) w^2 dt &= \int_a^x (p y'^2 + q_1 y^2) w^2 dt - K_1 \int_a^x p y'^2 w^2 dt - K_1 \int_a^x q_1 y^2 w^2 dt \\ &\leq (p y' y w^2 - Q y^2 w^{1+d}) \Big|_a^x + K_1 \int_a^x [(1+\delta) p w'^2 - q_1 w^2] y^2 dt \\ &\quad + \int_a^x (K_2 - q_2 w^2) y^2 dt \\ &\leq K_3 \int_a^x y^2 dt + (p y' y w^2 + w^d p^{-\frac{1}{2}} |Q| p^{\frac{1}{2}} y^2 w) \Big|_a^x \\ &\leq K_3 \int_a^x y^2 dt + (p y' y w^2 + K p^{\frac{1}{2}} y^2 w) \Big|_a^x. \end{aligned}$$

如果当 x 充分大时, $p y' y w^2 + K p^{\frac{1}{2}} y^2 w \leq 0$, 该积分自然收敛. 如果在某个区间 $[x_0, \infty)$ 上 $p y' y w^2 + K p^{\frac{1}{2}} y^2 w$ 有正的下界 c , 因为 y 平方可积, y 与 y' 不能总是同号, 故考虑集合

$$N = \{x | x \geq x_0, yy' < 0\}.$$

在这个集合上,

$$Kp^{\frac{1}{2}}y^2w > c - py'yw^2 = c + |py'yw^2| > |py'yw^2| = -py'yw^2$$

且

$$Kp^{\frac{1}{2}}y^2w > c,$$

即

$$\frac{K}{p^{\frac{1}{2}}w} > -\frac{y'}{y}, \quad \frac{K}{p^{\frac{1}{2}}w} < \frac{K^2}{c}y^2,$$

由此得

$$-\int_N \frac{y'}{y} dt \leq \frac{K^2}{c} \int_N y^2 dt < \infty.$$

这样便有

$$\int_{x_0}^x \frac{y'}{y} dt \geq \int_{[x_0, x] \cap N} \frac{y'}{y} dt \geq \int_N \frac{y'}{y} dt \geq -k,$$

即

$$\ln \left| \frac{y(x)}{y(x_0)} \right| \geq -k,$$

因此当 $x \geq x_0$ 时, $|y(x)| \geq |y(x_0)|e^{-k}$, 这与 y 平方可积矛盾, 故必存在一串严格递增趋于 ∞ 的点列 $\{x_n\}$, 使得

$$py'yw^2 + Kp^{\frac{1}{2}}y^2w \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

这样便可得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - K_1) \int_a^{x_n} (py'^2 + q_1y^2)w^2 dt$ 存在, 即积分 $\int_a^\infty (py'^2 + q_1y^2)w^2 dt$ 收敛.

如果 u 和 v 是方程 $My = 0$ 满足 $p(u'v - uv') = 1$ 的两个线性无关解, 则由

$$\begin{aligned} 2w^2 \left(\frac{q_1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} &= 2w^2 (q_1 p)^{\frac{1}{2}} (u'v - uv') \\ &= 2(wp^{\frac{1}{2}}u') \left(wq_1^{\frac{1}{2}}v \right) - 2(wp^{\frac{1}{2}}v') \left(wq_1^{\frac{1}{2}}u \right) \\ &\leq w^2 p(u'^2 + v'^2) + w^2 q_1(u^2 + v^2), \end{aligned}$$

注意到上面证明的结果及条件 (4) 便知 u, v 中必有一个不平方可积, 因此 M 是极限点的, 定理证毕.

这个定理还可以有另一种形式.

定理 3.3.5 (Read) 假设存在 $[a, \infty)$ 上非负的局部绝对连续函数 $w(x)$ 和分解式

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x),$$

使得定理 3.3.4 中的 (1)~(3) 满足且

$$(4)' \int_a^\infty wp^{-\frac{1}{2}} dx = \infty,$$

则 M 为极限点的.

证明 令 $G = \{x | w(x) > 0\}$, 由 w 的连续性知 G 是一个开集. 如果 G 有某个无界的构成区间 (x_0, ∞) , 则在 $[x_0 + 1, \infty)$ 上取

$$Q_1 = q_1 + \frac{1}{w^2}, \quad Q_2 = q_2 - \frac{1}{w^2}, \quad Q_3 = q_3,$$

而在 $[a, x_0 + 1)$ 上取

$$Q_j = q_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

则对分解式 $q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ 来说, 因为 $Q_3 = q_3$, 而在 $[x_0 + 1, \infty)$ 上,

$$(1 + \delta)pw'^2 - Q_1w^2 = (1 + \delta)pw'^2 - q_1w^2 - 1,$$

$$-Q_2w^2 = -q_2w^2 + 1,$$

所以定理 3.3.4 里的条件 (1)~(3) 都成立. 最后, 由于在 $[x_0 + 1, \infty)$ 上,

$$w^2 \left(\frac{Q_1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \geq w^2 \left(\frac{1}{w^2 p} \right)^{\frac{1}{2}} = wp^{-\frac{1}{2}},$$

条件 (4) 也满足, 故 M 为极限点的.

如果 G 的构成区间 J_n 都是有界的, 那么在每个 J_n 上选取子区间 I_n , 使得

$$\int_{I_n} wp^{-\frac{1}{2}} dx \geq \frac{1}{2} \int_{J_n} wp^{-\frac{1}{2}} dx.$$

在集合 $\bigcup_n I_n$ 上定义 Q_1, Q_2, Q_3 如前, 在其余地方令 $Q_j = q_j, j = 1, 2, 3$, 同样地, 对分解式 $q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ 来说, 定理 3.3.4 中条件 (1)~(3) 都成立, 而由于在 $\bigcup_n I_n$ 上,

$$w^2 \left(\frac{Q_1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \geq wp^{-\frac{1}{2}}.$$

故

$$\begin{aligned} \int_a^\infty w^2 \left(\frac{Q_1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} dx &\geq \int_{\bigcup_n I_n} wp^{-\frac{1}{2}} dx \geq \frac{1}{2} \int_{\bigcup_n J_n} wp^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_G wp^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_a^\infty wp^{-\frac{1}{2}} dx = \infty, \end{aligned}$$

条件 (4) 也满足, 所以 M 为极限点的.

推论 3.3.3 (Levinson) 如果存在正的局部绝对连续函数 $W(x)$, 使得

(1) pW'^2W^{-3} 有上界;

(2) qW^{-1} 有下界;

(3) $\int_a^\infty (pW)^{\frac{1}{2}} dx = \infty$,

则 M 是极限点的.

证明 取 $w = \frac{1}{\sqrt{W}}$, $q_1 = 0$, $q_2 = q$, $q_3 = 0$.

例 3.3.1 在 $[1, \infty)$ 上考虑正则微分算式 $My \equiv -y'' - x^\alpha y$.

取 $w = \frac{1}{x}$, $q_1 = 0$, $q_2 = -x^\alpha$, $q_3 = 0$, 则条件 (1), (3), (4)' 都满足, 条件 (2) 变成 $x^{\alpha-2}$ 有界, 所以 $\alpha \leq 2$ 时, M 为极限点的, 下面将证明 $\alpha > 2$ 时它是极限圆的.

特别地, 取同样的 w 与 q_1, q_2, q_3 , 可以证明

推论 3.3.4 (Hartman-Wintner-Titchmarsh) 如果对充分大的 x , $q(x) > Kx^2$, $K > 0$, 则 $-y'' + qy$ 在 $[1, \infty)$ 上是极限点的.

这也是一种控制 $q(x)$ 趋于 $-\infty$ 的速度的形式. 既然 $\alpha > 2$ 时, $-y'' - x^\alpha y$ 在 $[1, \infty)$ 上是极限圆的, 似乎 $q(x)$ 趋于 $-\infty$ 的速度不能再快了.

例 3.3.2 $My \equiv -y'' - (x^2 + xe^x \cos e^x)y$, $x \in [1, \infty)$.

取 $w = \frac{1}{x}$, $q_1 = 0$, $q_2 = -x^2$, $q_3 = -xe^x \cos e^x$, 则条件 (1), (2) 和 (4)' 都满足, 而由

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left| \int_1^x -te^t \cos e^t dt \right| &= \frac{1}{x} | -t \sin e^t |_1^x + \int_1^x \sin e^t dt | \\ &\leq \frac{1}{x} (| -x \sin e^x | + | \sin e | + x - 1) \leq 2 \end{aligned}$$

知条件 (3) 也满足, 这里的 $d = 1$. 所以 M 为极限点的.

这个例子说明即使 $q(x)$ 振荡得很厉害, 一再突破了 Hartman-Wintner-Titchmarsh 规定的趋于 $-\infty$ 的速度, 却仍然继续保持了微分算式的极限点性质. 从这里也可以品到一点判别准则的精细程度. 再看一个例子.

例 3.3.3 $My \equiv -y'' - (x^3 \sin^4 x)y$, $x \in [0, \infty)$.

显然, 除了 $n\pi$ 附近外, 都将有 $-x^3 \sin^4 x < -x^{\frac{5}{2}}$, 因此除一串以 $n\pi$ 为中心长度可以很小的区间外, $q(x)$ 趋于 $-\infty$ 的速度都比 $-x^2$ 来得快, 但是 $q(x)$ 在这串小区间上的性质已足以决定微分算式的极限点性质了.

考虑区间 $I_n = \left[n\pi - \frac{1}{\sqrt{n}}, n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, $n = 1, 2, \dots$, 在 I_n 上定义

$$w(x) = \begin{cases} x - n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}, & n\pi - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq x \leq n\pi, \\ n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}} - x, & n\pi < x \leq n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{cases}$$

在其余的地方让 $w(x) = 0$. 显然这是一个非负的局部绝对连续函数, 取

$$q_1(x) = 0, \quad q_2(x) = -x^3 \sin^4 x, \quad q_3(x) = 0,$$

容易看出条件 (1) 和 (3) 满足, 而在 $n\pi$ 附近,

$$\begin{aligned} (x^3 \sin^4 x) w^2(x) - (n\pi + t)^3 \sin^4(n\pi + t) w^2(n\pi + t) &= n^3 \left(\pi + \frac{t}{n} \right)^3 \sin^4 t w^2(n\pi + t) \\ &\leq n^3 \left(\pi + \frac{1}{n^{3/2}} \right)^3 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^4 \frac{1}{n} = O(1). \end{aligned}$$

另外,

$$\int_0^\infty w(x) dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty,$$

所以条件 (2) 与 (4)' 满足, 故 M 是极限点的.

在例 3.3.2 里也有一串区间, 在这串区间上 $q(x)$ 趋于 $-\infty$ 的速度跟 $-x^2$ 差不多, 可见为了保证 M 是极限点的, 对于 $q(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上的整体性质并无要求, 只需要 $q(x)$ 在部分范围内有较好的性质即可. 这便引导到下面所谓的“区间型判别准则”. 最早的这种判别准则见于 1951 年 P. Hartman 和 1963 年 R. S. Ismagilov 的文章, 后来 I. Knowles 和 M. S. P. Eastham 从不同的方面发展了它. 原来人们以为这是一类新型的极限点判别准则, 经 T. T. Read 的处理, 则仍然可以统一在 N. Levinson 技巧之内.

定理 3.3.6 (Eastham-Read) 设存在一串互不相交的区间 $\{I_n\}$ (按顺序排列), $I_n = [a_n, b_n]$, 和一串正数 $\{v_n\}$, 使得

$$(1) \quad v_n P_n^2 \geq K > 0, \text{ 其中, } P_n = \int_{a_n}^{b_n} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}};$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{v_n} = \infty;$$

$$(3) \quad \int_{a_n}^{b_n} q_-(x) dx \leq C v_n^2 P_n^3 \min_{I_n} \sqrt{p(x)},$$

则 M 为极限点的.

证明 适当地调整 v_n 可使 $K \geq 1$.

(1) 定义函数 $w(x)$.

由于 $1 \leq [v_n P_n^2] \leq v_n P_n^2 < [v_n P_n^2] + 1$, 这里 $[v_n P_n^2]$ 表示 $v_n P_n^2$ 的整数部分, 可以把 I_n 分成 $[v_n P_n^2] + 1$ 个小区间, 使得在每个这样的小区段 J 上, 都有

$$\frac{1}{2v_n P_n} \leq \int_J p^{-\frac{1}{2}}(x) dx \leq \frac{1}{v_n P_n}.$$

如果有一半以上的这种小区间, 使得

$$\int_J q_-(x)dx > 2Cv_nP_n \min_{I_n} \sqrt{p(x)},$$

则

$$\frac{[v_nP_n^2] + 1}{2} \int_J q_-(x)dx > Cv_nP_n([v_nP_n^2] + 1) \min_{I_n} \sqrt{p(x)} > Cv_n^2P_n^3 \min_{I_n} \sqrt{p(x)},$$

所以至少应有一半的这种小区间, 使得

$$\int_J q_-(x)dx \leq 2Cv_nP_n \min_{I_n} \sqrt{p(x)}.$$

在每一个这种小区间 $J = [c, d]$ 上, 取 $e \in (c, d)$, 使得

$$\int_c^e p^{-\frac{1}{2}}(x)dx = \frac{1}{2} \int_J p^{-\frac{1}{2}}(x)dx.$$

在这种小区间 J 上, 定义

$$w(x) = \begin{cases} \int_c^x p^{-\frac{1}{2}}(t)dt, & c \leq x \leq e, \\ w(e) - \int_e^x p^{-\frac{1}{2}}(t)dt, & e < x \leq d, \end{cases}$$

在 I_n 的其余地方以及 $\bigcup_n I_n$ 的补集上都定义 $w(x)$ 为零. 则 $w(x)$ 是非负的局部绝对连续函数且

$$\max_J w(x) = w(e) = \frac{1}{2} \int_J p^{-\frac{1}{2}}(x)dx \leq \frac{1}{2v_nP_n},$$

显然 $w'(x)$ 几乎处处等于 0 或 $\pm p^{-\frac{1}{2}}(x)$, 所以 $pw'^2 \leq 1$.

(2) 分解 $q(x)$ 如下: 在每个 I_n 的 $[v_nP_n^2] + 1$ 个子区间 $J = [c, d]$ 上定义

$$q_0(x) = \frac{1}{d-c} \int_c^d q_-(x)dx,$$

在 I_n 与 I_{n+1} 之间, 即 $[b_n, a_{n+1}]$ 上, 令

$$q_0(x) = \frac{1}{a_{n+1} - b_n} \int_{b_n}^{a_{n+1}} q_-(x)dx,$$

则 $q_0(x)$ 是 $[a, \infty)$ 上的阶梯函数, 显然 $[a, \infty)$ 可以由一些子区间 I 组成, 使得

$$\int_I [q_-(x) - q_0(x)]dx = 0.$$

取 $q_1(x) = 0, q_2(x) = q_+(x) - q_0(x), q_3(x) = q_-(x) + q_0(x)$, 则 $q(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)$.

(3) 验证定理 3.3.5 的条件.

(i) $(1 + \delta)pw'^2 - q_1w^2 = (1 + \delta)pw'^2 \leq 1 + \delta$.

(ii) 因为在那些不满足

$$\int_J q_-(x)dx \leq 2Cv_nP_n \min_{I_n} \sqrt{p(x)}$$

的小区间 J 以及 $\bigcup_n I_n$ 的补集上, $w(x) = 0$, 而在满足该不等式的小区间 J 上,

$$q_0w^2 - \left(\frac{1}{d-c} \int_J q_-(x)dx \right) w^2 \leq \frac{1}{d-c} 2Cv_nP_n \min_{I_n} \sqrt{p(x)} \frac{1}{4v_n^2P_n^2}.$$

由于 $\int_J p^{-\frac{1}{2}}(x)dx \leq \frac{d-c}{\min_{I_n} \sqrt{p(x)}}$, 故 $\frac{\min_{I_n} \sqrt{p(x)}}{d-c} \leq \frac{1}{\int_J p^{-\frac{1}{2}}(x)dx} \leq 2v_nP_n$, 于是

$$q_0w^2 \leq C,$$

所以整个讲来 $q_0w^2 \leq C$, 这样便得

$$-q_2w^2 = (q_0 - q_+)w^2 \leq C - q_+w^2 \leq C.$$

(iii) 取 $d = 1$, 注意到 $wp^{-\frac{1}{2}} \left| \int_a^x q_3(t)dt \right|$ 只在不等式 $\int_J q_-(s)ds \leq 2Cv_nP_n \min_{I_n} \sqrt{p}$ 满足的那些小区间 J 上不等于零, 而当 x 属于这种小区间 J 时,

$$\int_a^x q_3(t)dt = \int_a^c q_3(t)dt + \int_c^x q_3(t)dt = \int_c^x q_3(t)dt.$$

于是可得

$$\begin{aligned} wp^{-\frac{1}{2}} \left| \int_a^x q_3(t)dt \right| &\leq \frac{1}{2v_nP_n\sqrt{p}} \left| \int_c^x q_3(t)dt \right| \\ &= \frac{1}{2v_nP_n\sqrt{p}} \left| -\int_c^x q_-(t)dt + \frac{x-c}{d-c} \int_c^d q_-(t)dt \right| \\ &\leq \frac{1}{v_nP_n\sqrt{p}} \int_c^d q_-(t)dt \leq \frac{2Cv_nP_n \min_{I_n} \sqrt{p}}{v_nP_n\sqrt{p}} \leq 2C. \end{aligned}$$

(iv) 由于

$$\begin{aligned}\int_J wp^{-\frac{1}{2}} dx &= \int_c^e \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\int_c^x p^{-\frac{1}{2}} dt \right) dx + \int_e^d \frac{w(e)}{\sqrt{p}} dx - \int_e^d \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\int_e^x p^{-\frac{1}{2}} dt \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_c^e p^{-\frac{1}{2}} dx \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\int_J p^{-\frac{1}{2}} dx \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\int_e^d p^{-\frac{1}{2}} dx \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_J p^{-\frac{1}{2}} dx \right)^2 \geq \left(\frac{1}{4v_n P_n} \right)^2.\end{aligned}$$

故得

$$\int_a^\infty wp^{-\frac{1}{2}} dx \geq \sum_n \int_{I_n} wp^{-\frac{1}{2}} dx \geq \sum_n \frac{[v_n P_n^2] + 1}{2} \left(\frac{1}{4v_n P_n} \right)^2 \geq \frac{1}{32} \sum_n \frac{1}{v_n} = \infty.$$

这样条件 (i)~(iv) 均满足, 所以 M 是极限点的, 证毕.

推论 3.3.5 (Hartman) 如果在一串有固定长度的区间 $\{I_n\}$ 上, $q_-(x)$ 有一致的下界, 则 $-D^2 + q$ 是极限点的.

证明 取 $v_n = 1$ 用 Eastham-Read 定理即得.

例 3.3.4 在 $[1, \infty)$ 上考虑微分算式 $-y'' - x^\alpha \sin x^\beta y$. 取 $I_n = [(2n-1)\pi]^{\frac{1}{\beta}}, (2n\pi)^{\frac{1}{\beta}}]$ ($n = 1, 2, \dots$), 显然在 I_n 上 $q(x) \geq 0$, 所以 $q_-(x) = 0$, 而

$$P_n = (2n\pi)^{\frac{1}{\beta}} - ((2n-1)\pi)^{\frac{1}{\beta}} = (2n\pi)^{\frac{1}{\beta}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] = O(n^{-1+\frac{1}{\beta}}),$$

取 $v_n = n^{-2(1+\frac{1}{\beta})}$, 则当 $0 < \beta \leq 2$ 时, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{v_n} = \infty$, 所以对任何 α , 只要 $0 < \beta \leq 2$, 微分算式都是极限点的.

定理 3.3.7 (Read) 设

(1) 存在一串互不相交的区间 $\{J_n\}$ 使得 $q(x)$ 在每个 J_n 上非负;

(2) 存在常数 $\gamma > 0$ 和 $0 < c < 1$ 以及 J_n 的子区间 I_n ($n = 1, 2, \dots$), 使得在 $J_n \setminus I_n$ 的连通分支 J 上满足 $\int_J p^{-\frac{1}{2}} dx \geq \gamma \int_{J_n} p^{-\frac{1}{2}} dx$ 且有

$$\sum_{n=1}^\infty \left\{ \exp \left[c \int_{I_n} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right] - 1 \right\} \left(\int_{J_n} p^{-\frac{1}{2}} dx \right)^2 = \infty,$$

则 M 为极限点的.

证明 (1) 定义函数 $w(x)$.

设 $J_n = [a_n, b_n]$, 假定 $I_n = [c_1, c_3]$, 记 $c_0 = a_n, c_4 = b_n$, 可适当把 I_n 扩大一点, 使得

$$\int_{c_0}^{c_1} p^{-\frac{1}{2}} dx = \int_{c_3}^{c_4} p^{-\frac{1}{2}} dx = \gamma \int_{J_n} p^{-\frac{1}{2}} dx,$$

再取 $c_2 \in (c_1, c_3)$, 使得

$$\int_{c_1}^{c_2} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{c_2}^{c_3} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

首先在 $\bigcup_n J_n$ 外, 取 $w(x) = 0$, 而在 J_n 上定义 $w(x)$ 如下:

$$w(x) = \begin{cases} \int_{c_0}^x p^{-\frac{1}{2}} dt, & c_0 \leq x \leq c_1, \\ w(c_1) \exp \left[c \int_{c_1}^x \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dt \right], & c_1 \leq x \leq c_2, \\ w(c_1) \exp \left[c \int_x^{c_3} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dt \right], & c_2 \leq x \leq c_3, \\ \int_x^{c_4} p^{-\frac{1}{2}} dt, & c_3 \leq x \leq c_4, \end{cases}$$

所以当 $c_0 < x < c_1$ 与 $c_3 < x < c_4$ 时, 有

$$pw'^2 = 1,$$

而当 $c_1 < x < c_2$ 与 $c_2 < x < c_3$ 时, 则有

$$w' = \pm c \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} w, \quad c^{-2}pw'^2 - qw^2 = 0.$$

(2) 分解 $q(x)$ 如下: 在 $\bigcup_n J_n$ 外, 取 $q_1(x) = 0, q_2(x) = q(x), q_3(x) = 0$; 在 $\bigcup_n J_n$ 上, 取 $q_1(x) = q(x), q_2(x) = 0, q_3(x) = 0$.

(3) 下面验证定理 3.3.4 的条件.

显然 $q_1(x) \geq 0$, 取 $\delta = \frac{1}{c^2} - 1 > 0, K \geq \frac{1}{c^2}$, 则得

$$(1 + \delta)pw'^2 - q_1w^2 \leq K,$$

条件 (1) 成立. 根据 w, q_1, q_2, q_3 的定义, (2) 与 (3) 是自然满足的. 最后, 因为

$$\int_{J_n} w^2 \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{J_n} w^2 \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dx \geq \int_{c_1}^{c_2} w^2 \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{c_1}^{c_2} w^2(c_1) \exp \left[2c \int_{c_1}^x \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} dt \right] d \left(\int_{c_1}^x \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} dt \right) \\
&= \frac{w^2(c_1)}{2c} \exp \left[2c \int_{c_1}^x \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} dt \right] \Big|_{c_1}^{c_2} \\
&= \frac{w^2(c_1)}{2c} \left\{ \exp \left[2c \int_{c_1}^{c_2} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right] - 1 \right\} \\
&= \frac{\gamma^2}{2c} \left\{ \exp \left[c \int_{I_n} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right] - 1 \right\} \left(\int_{J_n} p^{-\frac{1}{2}} dx \right)^2.
\end{aligned}$$

所以

$$\int_a^\infty w^2 \left(\frac{q_1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} dx \geq \frac{\gamma^2}{2c} \sum_{n=1}^\infty \left\{ \exp \left[c \int_{I_n} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right] - 1 \right\} \left(\int_{J_n} p^{-\frac{1}{2}} dx \right)^2 = \infty,$$

条件 (4) 也满足, 故 M 为极限点的, 证毕.

推论 3.3.6 (Ismagilov-Knowles) 设

(1) 存在一串互不相交的区间 $\{J_n\}$, 使得在每个 J_n 上,

$$p(x) > p_n > 0, \quad q(x) \geq q_n > 0;$$

$$(2) \sum_{n=1}^\infty p_n^{\frac{3}{2}} q_n^{\frac{1}{2}} \left(\int_{J_n} \frac{dx}{p} \right)^3 = \infty,$$

则 M 为极限点的.

证明 对于 $\gamma = \frac{1}{4}$ 与 $0 < c < 1$, 取 J_n 的子区间 I_n , 使得 $J_n \setminus I_n$ 的两个连通分支上 p^{-1} 的积分都等于 $\frac{1}{4} \int_{J_n} p^{-1} dx$. 于是

$$\exp \left[c \int_{I_n} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right] - 1 \geq c \int_{I_n} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} dx \geq c p_n^{\frac{1}{2}} q_n^{\frac{1}{2}} \int_{I_n} p^{-1} dx = \frac{c}{2} p_n^{\frac{1}{2}} q_n^{\frac{1}{2}} \int_{J_n} p^{-1} dx,$$

故

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^\infty \left\{ \exp \left[c \int_{I_n} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right] - 1 \right\} \left(\int_{J_n} p^{-\frac{1}{2}} dx \right)^2 \\
&\geq \sum_{n=1}^\infty \frac{c}{2} p_n^{\frac{1}{2}} q_n^{\frac{1}{2}} \int_{J_n} p^{-1} dx \left(\int_{J_n} p^{-\frac{1}{2}} dx \right)^2 \geq \frac{c}{2} \sum_{n=1}^\infty p_n^{\frac{3}{2}} q_n^{\frac{1}{2}} \left(\int_{J_n} \frac{dx}{p} \right)^3 = \infty,
\end{aligned}$$

因此 M 为极限点的.

例 3.3.5 在 $[0, \infty)$ 上考虑 $My = -y'' + x^\alpha \sin(\pi x^\beta) y$, $\alpha, \beta > 0$, 显然对应的

$q(x)$ 在某些区间上趋于 $-\infty$, 取 $J_n = [(2n)^{\frac{1}{\beta}}, (2n+1)^{\frac{1}{\beta}}]$, $I_n = \left[\left(2n + \frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \left(2n + \frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}} \right]$, 当 $x \in I_n$ 时, $\sin \pi x^\beta \geq \frac{1}{2}$, 所以

$$q(x) \geq q_n = \frac{\left(2n + \frac{1}{6}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{2},$$

而

$$\int_{I_n} \frac{dx}{p} = \left(2n + \frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}} - \left(2n + \frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(2n + \frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left[1 - \left(1 - \frac{\frac{4}{6}}{2n + \frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \right] = O\left(n^{\frac{1-\beta}{\beta}}\right).$$

于是根据推论 3.3.6, 当

$$\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{3(1-\beta)}{\beta} \geq -1, \text{ 即 } \alpha \geq 4\beta - 6 \text{ 时,}$$

M 为极限点的. 但是由

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dx &= \int_{I_n} x^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \pi x^\beta} dx \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{I_n} x^{\frac{\alpha}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)} \left[\left(2n + \frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)} - \left(2n + \frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)} \left(2n + \frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)} \left[1 - \left(1 - \frac{\frac{4}{6}}{2n + \frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)} \right] \\ &= O\left(n^{\frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) - 1}\right), \end{aligned}$$

根据定理 3.3.7, 因为有指数函数出现, 只要 $\frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) - 1 > 0$ 即 $\alpha > 2\beta - 2$ 时, 便可得 M 为极限点的. 这个结果当然比前一个要好. 这主要是因为当 J_n 和 I_n 取得适当使 $\int_{I_n} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dx$ 无界时, $\exp \left[c \int_{I_n} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dx \right]$ 可以很快地趋于 ∞ .

以下讨论极限圆的判别. 设 $a = 0$, 算子的极限圆性质与极限点性质不同, 它对系数有更强的要求, 这一点可以从下述两个定理看出.

定理 3.3.8 (Eastham-Thompson) 对任何 $[0, \infty)$ 上的连续函数 $Q(x)$, 都存在一个局部 Lebesgue 可积的函数 $q(x)$ 使得 $q(x) < Q(x)$, 而 $M = -D^2 + q$ 是极限点的.

证明 首先给一个构造极限点微分算式的方法, 对一串正整数 $\{N_n\}$ 取两个正数序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 使得

$$a_n b_n = \pi N_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty.$$

考虑 $[0, \infty)$ 上一串分点

$$s_0 = 0, \quad s_n = \sum_{k=1}^n b_k, \quad n = 1, 2, \dots.$$

在每个区间 $[s_{n-1}, s_n) (n = 1, 2, \dots)$ 上定义

$$q(x) = -a_n^2,$$

于是得到一个阶梯函数, 它自然是局部 Lebesgue 可积的, 显然可以看出

$$Y(x) = (-1)^{M_{n-1}} \cos a_n(x - s_{n-1}), \quad s_{n-1} \leq x < s_n, n = 1, 2, \dots$$

是方程 $-y'' + q(x)y = 0$ 的解, 其中, $M_0 = 0, M_n = \sum_{k=1}^n N_k (n = 1, 2, \dots)$. 因为

$$\begin{aligned} Y(s_n - 0) &= (-1)^{M_{n-1}} \cos a_n(s_n - s_{n-1}) = (-1)^{M_{n-1}} \cos \pi N_n \\ &= (-1)^{M_{n-1} + N_n} = (-1)^{M_n}, \end{aligned}$$

$$Y(s_n + 0) = (-1)^{M_n} \cos a_{n+1}(s_{n+1} - s_n) = (-1)^{M_n},$$

所以 $Y(x)$ 在整个区间 $[0, \infty)$ 上连续. 此外, 由

$$\begin{aligned} Y'(x) &= (-1)^{M_{n-1}+1} a_n \sin(x - s_{n-1}), \quad s_{n-1} \leq x < s_n, n = 1, 2, \dots, \\ Y'(s_n - 0) &= 0 = Y'(s_n + 0), \end{aligned}$$

可知 $Y'(x)$ 也在整个区间上连续. 但由于

$$\int_0^{\infty} Y^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s_{n-1}}^{s_n} \cos^2 a_n(x - s_{n-1}) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty,$$

故微分算式 M 为极限点的.

现在对区间 $[0, \infty)$ 上的连续函数 $Q(x)$, 取正实数序列 $\{b_n\}$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

作分点 $s_0 = 0, s_n = \sum_{k=1}^n b_k (n = 1, 2, \dots)$, 令

$$Q_n = \min_{s_{n-1} \leq x \leq s_n} Q(x),$$

选取正整数序列 $\{N_n\}$, 使得

$$\frac{\pi^2 N_n^2}{b_n^2} > -Q_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

再取正实数序列 $\{a_n\}$, 使得

$$a_n b_n = \pi N_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

按前面讲的方法构造函数 $q(x)$, 则

$$q(x) = -a_n^2 = -\frac{\pi^2 N_n^2}{b_n^2} < Q_n \leq Q(x), \quad s_{n-1} \leq x < s_n, n = 1, 2, \dots,$$

这个 $q(x)$ 便满足定理的要求. 证毕.

注 如果选取的 $\{N_n\}, \{a_n\}, \{b_n\}$ 还使得 $\{a_n\}$ 有正的下界, 那么方程 $-y'' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关解

$$Y(x) = (-1)^{M_{n-1}} \cos a_n(x - s_{n-1}), \quad s_{n-1} \leq x < s_n, n = 1, 2, \dots,$$

$$Z(x) = (-1)^{M_{n-1}} \frac{1}{a_n} \sin a_n(x - s_{n-1}), \quad s_{n-1} \leq x < s_n, n = 1, 2, \dots$$

都是有界的, 所以它的一切解均有界. W. T. Patula 与 J. S. W. Wong 在 1972 年的文章 *An L^p -analogue of the Weyl alternative*, Math. Ann. 197, 9~28 中曾证明如果微分算式 $-y'' + q(x)y$ 的一切解均有界, 则 $q(x)$ 的一切 L^p 摄动 ($1 \leq p \leq 2$) 都不改变它的极限点或极限圆性质. 根据这个结论, 便可以在定理 3.3.8 得到的 $q(x)$ 上加上某些小的摄动项, 使得新的 $q(x)$ 不仅满足定理的要求, 而且还是无穷可微的.

定理 3.3.9 (Eastham-Thompson) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[0, \infty)$ 上无穷可微的 q_1 和 q_2 , 使得除了 x 属于一个总长度不大于 ε 的区间组外都有 $q_1(x) = q_2(x)$, 且微分算式 $M_1 = -D^2 + q_1$ 为极限点的, 而 $M_2 = -D^2 + q_2$ 为极限圆的.

证明 取 $N_n = 2, a_n = n, b_n = \frac{2\pi}{n}(n-1, 2, \dots)$, 则按定理 3.3.8 的注可以取到无穷次可微单调下降 (因为 a_n 是递增的) 的 $q_1(x)$, 使得 $M_1 y \equiv -y'' + q_1(x)y$ 为极限点的. 这里 $q_1(x)$ 是由定理 3.3.8 里的阶梯函数 $q(x)$ 在 s_n 的 $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ 邻域内经过光滑化后得到的.

为了得到微分算式 M_2 , 令

$$q_2(x) = q_1(x) + |q_1(x)|^{\frac{1}{2}}(|q_1(x)|^{-\frac{1}{2}})'',$$

显然除了总长度为 ε 的区间组 $\left\{ \left(s_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, s_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) \mid n = 1, 2, \dots \right\}$ 外, 其余地方 $q_1(x)$ 都与 $q_2(x)$ 相等. 下面来证明 $M_2 y \equiv -y'' + q_2(x)y$ 是极限圆的.

取

$$f(x) = \begin{cases} |q_1(x)|^{-\frac{1}{4}} e^{i \int_{x_0}^x |q_1(t)|^{\frac{1}{2}} dt}, & x \in [x_0, \infty), \\ \text{二次连续可微函数}, & x \in [0, x_0], \end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |q_1(x)|^{-\frac{1}{2}} dx &= \int_0^{s_1} |q_1(x)|^{-\frac{1}{2}} dx + \sum_{n=1}^\infty \int_{s_n}^{s_{n+1}} |q_1(x)|^{-\frac{1}{2}} dx \\ &\leq \int_0^{s_1} |q_1(x)|^{-\frac{1}{2}} dx + \sum_{n=1}^\infty \frac{2\pi}{(n+1)^2} < \infty, \end{aligned}$$

所以 $f \in L^2[0, \infty)$. 此外在 $[x_0, \infty)$ 上,

$$\begin{aligned} M_2 f(x) &= -f''(x) + q_2(x)f(x) \\ &= -[(-q_1(x)^{-\frac{1}{4}})'' + i((-q_1(x))^{\frac{1}{4}})' + i((-q_1(x))^{\frac{1}{4}})'(-q_1(x))^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - (-q_1(x))^{\frac{3}{4}}] e^{i \int_{x_0}^x (-q_1(t))^{\frac{1}{2}} dt} + [q_1(x)(-q_1(x))^{-\frac{1}{4}} \\ &\quad + ((-q_1(x))^{-\frac{1}{4}})'] e^{i \int_{x_0}^x (-q_1(t))^{\frac{1}{2}} dt} \\ &= -i[((-q_1(x))^{\frac{1}{4}})' + ((-q_1(x))^{-\frac{1}{4}})'(-q_1(x))^{\frac{1}{2}}] e^{i \int_{x_0}^x (-q_1(t))^{\frac{1}{2}} dt} = 0. \end{aligned}$$

因此 $M_2 f \in L^2[0, \infty)$, 这表示 f 属于最大算子 $T_1(M_2)$ 的定义域 $\mathcal{D}(T_1(M_2))$, 而当 $x \rightarrow \infty$ 时, Lagrange 双线性型

$$\begin{aligned} [f, f](x) &= f(x)\overline{f'(x)} - f'(x)\overline{f(x)} \\ &= (-q_1(x))^{-\frac{1}{4}} e^{i \int_{x_0}^x (-q_1(t))^{\frac{1}{2}} dt} \overline{[((-q_1(x))^{\frac{1}{4}})' + i(-q_1(x))^{\frac{1}{4}}] e^{i \int_{x_0}^x (-q_1(t))^{\frac{1}{2}} dt}} \\ &\quad - [((-q_1(x))^{-\frac{1}{4}})' + i(-q_1(x))^{\frac{1}{4}}] e^{i \int_{x_0}^x (-q_1(t))^{\frac{1}{2}} dt} \overline{(-q_1(x))^{-\frac{1}{4}} e^{i \int_{x_0}^x (-q_1(t))^{\frac{1}{2}} dt}} \\ &= -2i \end{aligned}$$

并不趋于零, 所以由定理 1.2.5, M_2 是极限圆的. 证毕.

这条定理说明微分算式的极限圆性质并不像极限点性质那样可以由一串区间上系数的性质决定, 它是由系数在整个区间上的性质决定的. 这一现象并不是二阶情形所特有的, T. T. Read 对一般 $2n$ 阶对称微分算式的极限圆情形也得到了类似的定理.

下面将用渐近方法考虑微分算式的解在无穷远处的渐近性态来得到某些极限圆情形的充分判别原则.

定理 3.3.10 (Read) 设存在正函数 $f(x), f'(x)$ 局部绝对连续且

$$h = f \left(Mf + \frac{1}{pf^3} \right) \in L[0, \infty),$$

则方程

$$My = 0$$

的解有下述渐近估计:

$$y = fe^{\pm iF}(1 + o(1)), \quad y' = \left(f \mp \frac{i}{pf}\right)e^{\pm iF}(1 + o(1)),$$

其中, $F' = -\frac{1}{pf^2}$.

证明 设 y 是方程的解, 令

$$w_1 = \frac{y}{f}, \quad w_2 = -pfy' + pf'y,$$

则 w_1 与 w_2 满足方程组

$$w_1' = -\frac{1}{pf^2}w_2, \quad w_2' = \left(\frac{1}{pf^2} - h\right)w_1.$$

把它写成矩阵形式, 即

$$W' = (A + E)W,$$

其中,

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{pf^2} \\ \frac{1}{pf^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -h & 0 \end{pmatrix}.$$

而 $E \in L[0, \infty)$, 先解 $W' = AW$, 然后用常数变易法去估计解.

设 $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, $\varphi' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}\varphi$, 其中, $\alpha = -\frac{1}{pf^2}$, 则

$$\varphi_1' = \alpha\varphi_2, \quad \varphi_2' = -\alpha\varphi_1.$$

于是

$$\frac{\varphi_1'}{\varphi_2} = -\frac{\varphi_2'}{\varphi_1}, \quad \varphi_1\varphi_1' = -\varphi_2\varphi_2',$$

积分得

$$\varphi_1^2 = -\varphi_2^2, \quad \varphi_1 = \pm i\varphi_2.$$

故

$$\varphi_1' = \pm i\alpha\varphi_1, \quad \varphi_1 = e^{\pm i \int \alpha dx} = e^{\pm iF}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\alpha}\varphi_1' = \pm ie^{\pm iF}.$$

这样便得到 $W' = AW$ 的一个基本解组

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{iF} & e^{-iF} \\ ie^{iF} & ie^{-iF} \end{pmatrix}.$$

显然

$$\det \Phi = -2i \neq 0, \quad \Phi^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-iF} & -ie^{-iF} \\ e^{iF} & ie^{iF} \end{pmatrix}.$$

设 $W = \Phi \Psi$, 其中, $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$, 则

$$\Phi' \Psi + \Phi \Psi' = (A + E) \Phi \Psi,$$

即

$$\Phi \Psi' = E \Phi \Psi, \quad \Psi' = \Phi^{-1} E \Phi \Psi.$$

因为 $E \in L[0, \infty)$ 所以 $\Phi^{-1} E \Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ih & ihe^{-2iF} \\ -ihe^{2iF} & -ih \end{pmatrix} \in L[0, \infty)$. 把它们看成是空间 \mathbf{R}^2 中的向量, 作内积

$$(\Psi', \Psi) = (\Phi^{-1} E \Phi \Psi, \Psi), \quad (\Psi, \Psi') = (\Psi, \Phi^{-1} E \Phi \Psi),$$

所以

$$\left(\frac{\|\Psi\|^2}{2} \right)' \leq \|\Phi^{-1} E \Phi \Psi\| \|\Psi\| \leq \|\Phi^{-1} E \Phi\| \|\Psi\|^2.$$

因为有限维 Banach 空间上的模都等价, 故

$$\|\Phi^{-1} E \Phi\| \leq K|h|, \quad (\|\Psi(x)\|^2)' \leq 2K|h(x)|\|\Psi(x)\|^2,$$

于是

$$\|\Psi(x)\|^2 \leq \|\Psi(0)\|^2 e^{2K \int_0^\infty |h(x)| dx},$$

这表示 Ψ_1, Ψ_2 在 $[0, \infty)$ 上有界. 由于齐次方程的解可以不考虑常数因子, 故得

$$\Psi = 1 + o(1).$$

这样便得到了 W 的基本解组的渐近估计

$$\begin{pmatrix} e^{iF}(1+o(1)) \\ ie^{iF}(1+o(1)) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{-iF}(1+o(1)) \\ -ie^{-iF}(1+o(1)) \end{pmatrix}$$

由此可得 y 与 y' 的渐近估计

$$y = fw_1 = fe^{\pm iF}(1 + o(1)),$$

$$y' = \frac{1}{pf}(pf'y - w_2) = \frac{f'}{f}y - \frac{w_2}{pf} = \left(f' \mp \frac{i}{pf}e^{\pm iF}\right)(1 + o(1)).$$

定理证毕.

推论 3.3.7 (Knowles) 设存在正函数 $f(x), f'(x)$ 局部绝对连续且

$$f\left(Mf + \frac{1}{pf^3}\right) \in L[0, \infty),$$

则 M 为极限圆情形的充分必要条件是 $f \in L^2[0, \infty)$.

如果 u 和 v 是方程 $My = 0$ 满足 $p(u'v - uv') = 1$ 的两个解, 令 $r^2 = u^2 + v^2$, 则 M 为极限圆的充分必要条件是 $r \in L^2[0, \infty)$. 但是由 $r' = \frac{u'u + v'v}{r}$ 可得

$$\begin{aligned} Mr + \frac{1}{pr^3} &= -(pr')' + qr + \frac{1}{pr^3} = -\left(\frac{pu'u + pv'v}{r}\right)' + qr + \frac{1}{pr^3} \\ &= -\frac{(pu')'u + (pv')'v + pu'^2 + pv'^2}{r} + \frac{p(u'u + v'v)^2}{r^3} + qr + \frac{1}{pr^3} \\ &= -\frac{q}{r}(u^2 + v^2) + \frac{p(u'u + v'v)^2 - (pu'^2 + pv'^2)(u^2 + v^2)}{r^3} + qr + \frac{1}{pr^3} \\ &= -\frac{p(u'v - uv')^2}{r^3} + \frac{1}{pr^3} = 0, \end{aligned}$$

所以推论 3.3.7 里的 f 可以看成是 r 的一个近似.

例 3.3.6 在 $[1, \infty)$ 上考虑微分算式 $My = -(x^\alpha y')' - x^\beta y$, 取 $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{\alpha+\beta}{4}}}$, 则

$$f\left(Mf + \frac{1}{pf^3}\right) = \frac{\alpha+\beta}{4} \left(\frac{3\alpha-\beta}{4} - 1\right) x^{\frac{\alpha-\beta}{2}-2},$$

当 $\alpha - \beta < 2$ 时, $f\left(Mf + \frac{1}{pf^3}\right) \in L[1, \infty)$. 由推论 3.3.7, 对于满足 $\alpha - \beta < 2$ 的 α 和 β , M 是极限圆的充分必要条件是 $\alpha + \beta > 2$.

特别地, 当 $\alpha = 0$ 时, 已经知道 M 在 $\beta \leq 2$ 时是极限点的, 现在则得到 $\beta > 2$ 时它是极限圆的.

下面推广定理 3.3.10 使它在势函数部分能允许有一个小的摄动项. 考虑 $q = r + s$, 其中, r 是一个比较好的函数, 而摄动项 s 则可以振荡得很频繁, 但从某种意义上来说是某个“小”函数的导数, 这样能证明方程

$$My = -(py')' + (r + s)y = 0$$

的解主要的将由 r 来确定.

定理 3.3.11 (Read) 设存在正函数 $f(x)$ 和函数 $u(x), v(x)$, 使得 $f'(x), u(x), v(x)$ 都是局部绝对连续的, 且满足

$$(1) f \left[-(pf')' + rf + \frac{1}{pf^3} \right] \in L[0, \infty);$$

(2) u 有界并使得下列 3 个函数都在 $[0, \infty)$ 上 Lebesgue 可积:

$$(i) \frac{u^2}{pf^2};$$

$$(ii) u' + \frac{2v}{pf^2};$$

$$(iii) v' - \frac{2u}{pf^2} + \frac{sf^2}{2} - \frac{2v^2}{pf^2},$$

则方程的解有渐近估计

$$y = fe^{u \pm iF}(1 + o(1)),$$

$$y' = \left[f' - \frac{1}{pf} \left(2v \pm \frac{i}{e^{2u}} \right) \right] e^{u \pm iF}(1 + o(1)),$$

其中, $F' = -\frac{1}{pf^2e^{2u}}$.

证明 设 y 是方程的解, 令

$$w_1 = \frac{y}{fe^u}, \quad w_2 = \left(pf' - \frac{2v}{f} \right) e^u y - pfe^u y',$$

则由

$$y = fe^u w_1, \quad y' = f'e^u w_1 - \frac{2ve^u}{pf} w_1 - \frac{w_2}{pfe^u}$$

可得 w_1, w_2 的微分方程组

$$w_1' = \left(-u' - \frac{2v}{pf^2} \right) w_1 - \frac{1}{pf^2e^{2u}} w_2,$$

$$w_2' = -e^{2u} \left(-f(pf')' + rf^2 + 2v' + sf^2 - \frac{4v^2}{pf^2} \right) w_1 + \left(u' + \frac{2v}{pf^2} \right) w_2.$$

记

$$G = f \left[-(pf')' + rf + \frac{1}{pf^3} \right], \quad H = v' - \frac{2u}{pf^2} + \frac{sf^2}{2} - \frac{2v^2}{pf^2},$$

则由于 u 有界, 可得

$$\begin{aligned} -e^{2u} \left(-f(pf')' + rf^2 + 2v' + sf^2 - \frac{4v^2}{pf^2} \right) &= -e^{2u} \left(G - \frac{1}{pf^2} + 2H + \frac{4u}{pf^2} \right) \\ &= -e^{2u} \left[G + 2H - \frac{1}{pf^2}(1 - 4u) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -e^{2u} \left[G + 2H - \frac{1}{pf^2} e^{4u} - \frac{1}{pf^2} (1 - 4u - e^{-4u}) \right] \\
&= -e^{2u} \left[G + 2H - \frac{1}{pf^2 e^{4u}} + \frac{1}{pf^2} O(u^2) \right].
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
W &= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{pf^2 e^{2u}} \\ \frac{1}{pf^2 e^{2u}} & 0 \end{pmatrix}, \\
E &= \begin{pmatrix} u' - \frac{2v}{pf^2} & 0 \\ -e^{2u} \left[G + 2H + \frac{1}{pf^2} O(u^2) \right] & u' + \frac{2v}{pf^2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

则方程组可写成矩阵形式

$$W' = (A + E)W.$$

由条件可知 $E \in L[0, \infty)$, 所以用定理 3.3.10 里的证明方法可得 W 的两个基本解组是

$$\begin{pmatrix} e^{iF}(1+o(1)) \\ ie^{iF}(1+o(1)) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{-iF}(1+o(1)) \\ -ie^{-iF}(1+o(1)) \end{pmatrix},$$

即

$$w_1 = e^{\pm iF}(1+o(1)), \quad w_2 = \pm ie^{\pm iF}(1+o(1)),$$

这里 $F' = -\frac{1}{pf^2 e^{2u}}$. 由此可得

$$\begin{aligned}
y &= f e^{u \pm iF}(1+o(1)), \\
y' &= \frac{1}{pf e^u} \left[\left(pf' - \frac{2v}{f} \right) f e^{2u \pm iF}(1+o(1)) \mp ie^{\pm iF}(1+o(1)) \right] \\
&= \left[f' - \frac{1}{pf} \left(2v \pm \frac{i}{e^{2u}} \right) \right] e^{u \pm iF}(1+o(1)).
\end{aligned}$$

定理证毕.

通常在应用定理 3.3.11 时, 若 $r < 0$, 便取 $f = (-pr)^{-\frac{1}{4}}$. 于是 $rf + \frac{1}{pf^3} = 0$. 这样第 1 个条件变成 $f(pf')' \in L[0, \infty)$. 然后再取 u, v , 使得

$$u' + \frac{2v}{pf^2} = 0, \quad v' - \frac{2u}{pf^2} + \frac{sf^2}{2} = 0.$$

推论 3.3.8 设 $S' = s, S \in L[0, \infty) \cap L^2[0, \infty)$, 则方程

$$y'' + (1+s)y = 0$$

的解有渐近估计

$$y = e^{\pm ix}(1 + o(1)), \quad y' = (-S \pm i)e^{\pm ix}(1 + o(1)).$$

证明 取 $f = 1, u = 0, v = -\frac{S}{2}$, 则在定理 3.3.11 中,

$$f \left[-(pf')' + rf + \frac{1}{pf^3} \right] = 0, \quad p = -1, r = -1.$$

$$u' + \frac{2v}{pf^2} = S \in L[0, \infty),$$

$$v' - \frac{2u}{pf^2} + \frac{sf^2}{2} - \frac{2v^2}{pf^2} = -\frac{s}{2} + \frac{s}{2} + \frac{S^2}{2} = \frac{S^2}{2} \in L[0, \infty)$$

条件均满足. 此时,

$$F' = -\frac{1}{pf^2}e^{2u} = 1.$$

故 $F = x$, 于是得

$$y = e^{\pm ix}(1 + o(1)),$$

$$y' = (-S \pm i)e^{\pm ix}(1 + o(1)).$$

证毕.

从这里可以看出, 当 s 是一个“小”函数 S 的导数时, 方程的解就与 $y'' + y = 0$ 的解差不多, 这时微分算式 $y'' + (1 + s)y$ 属于极限点情形.

例 3.3.7 在 $[1, \infty)$ 上考虑微分算式 $My = y'' + (1 + Kx^\alpha \sin x^\beta)y$. 由于

$$\begin{aligned} S &= \int Kx^\alpha \sin x^\beta dx = -\frac{K}{\beta}x^{\alpha-\beta+1} \cos x^\beta + \frac{K(\alpha-\beta+1)}{\beta} \int x^{\alpha-\beta} \cos x^\beta dx \\ &= -\frac{K}{\beta}x^{\alpha-\beta+1} \cos x^\beta + \frac{K(\alpha-\beta+1)}{\beta^2}x^{\alpha-2\beta+1} \sin x^\beta - \dots, \end{aligned}$$

所以当 $0 < \alpha < \beta - 2$ 时, $S = O(x^{\alpha-\beta+1}) \in L[1, \infty) \cap L^2[1, \infty)$, M 为极限点型的.

推论 3.3.9 (J. S. W. Wong) 如果微分算式 $M = -DpD + q$ 的系数满足

- (1) q' 局部绝对连续, q'' 局部 Lebesgue 可积;
- (2) $q < 0$;
- (3) $(-pq)^{-\frac{1}{4}} \in L^2[0, \infty)$;
- (4) $\{p[(-pq)^{-\frac{1}{4}}]'\}' \in L^2[0, \infty)$,

则 M 为极限圆的.

证明 取 $f = (-pq)^{-\frac{1}{4}}, u = 0, v = 0$, 则定理 3.3.11 的条件均满足, 所以方程 $My = 0$ 的解有渐近估计

$$y = (-pq)^{-\frac{1}{4}}e^{\pm iF}(1 + o(1)).$$

注意到条件 (3) 便知一切解都平方可积, 故微分算式 M 为极限圆型的.

推论 3.3.10 (Everitt) 如果微分算式 $M = -DpD + q$ 的系数满足推论 3.3.9 的前 3 个条件, 且

$$(4)' [p(pq)'(-pq)^{-\frac{5}{4}}]' \in L^2[0, \infty),$$

则 M 为极限圆型的.

证明 因为

$$[p(pq)'(-pq)^{-\frac{5}{4}}]' = 4\{p[(-pq)^{-\frac{1}{4}}]'\}',$$

所以 Everitt 的结果与 Wong 的结果是等价的.

类似地, 也可以从 Read 定理推出更早些时候 Dunford-Schwartz 的一条极限圆判别准则.

推论 3.3.11 (Dunford-Schwartz) 如果 $M = -DpD + q$ 的系数满足 Wong 推论的前 3 个条件, 且

$$(4)'' \left[\frac{(-pq)'}{p^{\frac{1}{2}}(-q)^{\frac{3}{2}}} \right]' + \frac{1}{4} \frac{[(-pq)']^2}{p^{\frac{3}{2}}(-q)^{\frac{5}{2}}} \in L[0, \infty),$$

则 M 为极限圆型.

证明 因为

$$\begin{aligned} -4\{p[(-pq)^{-\frac{1}{4}}]'\}' &= [p(-pq)'(-pq)^{-\frac{5}{4}}]' \\ &= \frac{[p(-pq)']'}{(-pq)^{\frac{5}{4}}} - \frac{5}{4} \frac{p[(-pq)']^2}{(-pq)^{\frac{9}{4}}}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \left[\frac{(-pq)'}{p^{\frac{1}{2}}(-q)^{\frac{3}{2}}} \right]' + \frac{1}{4} \frac{[(-pq)']^2}{p^{\frac{3}{2}}(-q)^{\frac{5}{2}}} &= \left[\frac{p(-pq)'}{(-pq)^{\frac{3}{2}}} \right]' + \frac{1}{4} \frac{[(-pq)']^2}{p^{\frac{3}{2}}(-q)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{[p(-pq)']'}{(-pq)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{p[(-pq)']^2}{(-pq)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{4} \frac{[(-pq)']^2}{p^{\frac{3}{2}}(-q)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{[p(-pq)']'}{(-pq)^{\frac{3}{2}}} - \frac{5}{4} \frac{p[(-pq)']^2}{(-pq)^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned}$$

故可得

$$-4(-pq)^{-\frac{1}{4}}\{p[(-pq)^{-\frac{1}{4}}]'\}' = \left[\frac{(-pq)'}{p^{\frac{1}{2}}(-q)^{\frac{3}{2}}} \right]' + \frac{1}{4} \frac{[(-pq)']^2}{p^{\frac{3}{2}}(-q)^{\frac{5}{2}}},$$

因此取 $f = (-pq)^{-\frac{1}{4}}, u = 0, v = 0$, 用定理 3.3.11 即得.

最后再考虑一个例子.

例 3.3.8 在 $[1, \infty)$ 上考虑微分算式 $My \equiv y'' + (x^\alpha + Kx^\beta \sin x^\gamma)y$, 由例 3.3.6 知当 $\alpha > 2, K = 0$ 时, M 为极限圆的. 现设 $\alpha > 2$, 而 $K \neq 0$, 即增加了一个摄动项的情形.

应用定理 3.3.11, 这时 $r = -x^\alpha < 0$, 所以取 $f(x) = x^{-\frac{\alpha}{4}}$. 于是 $f \in L^2[1, \infty)$ 且

$$ff'' = \left(-\frac{\alpha}{4}\right)\left(-\frac{\alpha}{4} - 1\right)x^{-\frac{\alpha}{2}-2} \in L[1, \infty),$$

定理 3.3.11 的条件 (1) 满足. 记 $\delta = \frac{\alpha}{2}, C = \frac{K}{2}$, 取 u, v 满足微分方程组

$$\begin{aligned} u' &= 2x^\delta v, \\ v' &= -2x^\delta u - Cx^{\beta-\delta} \sin x^\gamma, \end{aligned}$$

即

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 2x^\delta \\ -2x^\delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -Cx^{\beta-\delta} \sin x^\gamma \end{pmatrix}.$$

齐次方程的基本解组是

$$\begin{pmatrix} e^{iF} & e^{-iF} \\ ie^{iF} & -ie^{-iF} \end{pmatrix},$$

其中, $F' = 2x^\delta, F = \frac{2}{\delta+1}x^{\delta+1}$. 用常数变易法求 u, v , 设

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{iF} & e^{-iF} \\ ie^{iF} & -ie^{-iF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

代入方程组得

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-iF} & -ie^{-iF} \\ e^{iF} & ie^{iF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -Cx^{\beta-\delta} \sin x^\gamma \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{iC}{2} \int x^{\beta-\delta} \sin x^\gamma \left(\cos \frac{2}{\delta+1}x^{\delta+1} - i \sin \frac{2}{\delta+1}x^{\delta+1} \right) dx, \\ c_2 &= -\frac{iC}{2} \int x^{\beta-\delta} \sin x^\gamma \left(\cos \frac{2}{\delta+1}x^{\delta+1} + i \sin \frac{2}{\delta+1}x^{\delta+1} \right) dx. \end{aligned}$$

因为当 $\gamma \geq 1 + \delta$ 时,

$$\int x^{\beta-\delta} \sin x^\gamma \sin x^{\delta+1} dx = -\frac{1}{\gamma} x^{\beta-\delta-\gamma+1} \sin x^{\delta+1} \cos x^\gamma + \dots = O(x^{\beta-\delta-\gamma+1}),$$

而当 $\gamma < 1 + \delta$ 时,

$$\int x^{\beta-\delta} \sin x^\gamma \sin x^{\delta+1} dx = -\frac{1}{\delta+1} x^{\beta-2\delta} \sin x^\gamma \cos x^{\delta+1} + \dots = O(x^{\beta-2\delta}),$$

所以

$$u, v = \begin{cases} O(x^{\beta - \frac{\alpha}{2} - \gamma + 1}), & \gamma \geq 1 + \delta, \\ O(x^{\beta - \alpha}), & \gamma < 1 + \delta. \end{cases}$$

于是当 $\beta < \min \left\{ \frac{\alpha}{4} + \gamma - \frac{3}{2}, \frac{3\alpha}{4} - \frac{1}{2} \right\}$ 时, 定理 3.3.11 的条件 (2) 也满足. 因此当 $\alpha > 2, K \neq 0$ 而 $\beta < \min \left\{ \frac{\alpha}{4} + \gamma - \frac{3}{2}, \frac{3\alpha}{4} - \frac{1}{2} \right\}$ 时, 增加了摄动项的微分算式仍是极限圆的.

3.4 Weyl 函 数

定义 3.4.1 设微分算式 M 在 ∞ 处为极限点的. 称 $m_\infty(\lambda)$ 为 M 的 Weyl 函数, 记作 $M(\lambda)$.

因为 $\lim_{b \rightarrow \infty} C_b(\lambda) = M(\lambda)$. 所以对任何 $0 < b_n < \infty, 0 \leq \beta_n < \pi$, 只要 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{b_n}(\lambda, \beta_n) = M(\lambda)$.

定理 3.4.1 设 M 在 ∞ 处为极限点的, 则

- (1) $M(\lambda)$ 分别在 $\text{Im}\lambda > 0$ 和 $\text{Im}\lambda < 0$ 上解析;
- (2) $M(\bar{\lambda}) = \overline{M(\lambda)}$;
- (3) $\text{Im}\lambda > 0$ 时, $\text{Im}M(\lambda) > 0$; $\text{Im}\lambda < 0$ 时, $\text{Im}M(\lambda) < 0$;
- (4) $M(\lambda)$ 的零点和极点均在实轴上且为简单的, 残数为负数.

证明 (1) 在上半平面上任取一点 λ_0 . 要证明 $M(\lambda)$ 在 λ_0 点解析. 取 λ_0 的一个全部含在上半平面内的闭圆域

$$B_r(\lambda_0) = \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| \leq r\},$$

当 $b = 1$ 时, $C_1(\lambda)$ 的圆心 $m_{10}(\lambda)$ 和 $r_1(\lambda)$ 分别是

$$m_{10}(\lambda) = -\frac{[\varphi, \theta](1)}{[\theta, \theta](1)} = -\frac{[\varphi, \theta](1)}{2i\text{Im}\lambda \int_0^1 |\theta|^2 dx},$$

$$r_1(\lambda) = \frac{1}{2\text{Im}\lambda \int_0^1 |\theta|^2 dx}.$$

它们都是上半平面的连续函数 (因为分母不等于零, 而 φ, θ 都是 λ 的整函数). 这样当 λ 在 $B_r(\lambda_0)$ 中变时, $m_{10}(\lambda)$ 和 $r_1(\lambda)$ 都有界, 因此 $\bigcup_{\lambda \in B_r(\lambda_0)} (C_1(\lambda) \text{ 连同内部})$ 是 m 平面上的有界集.

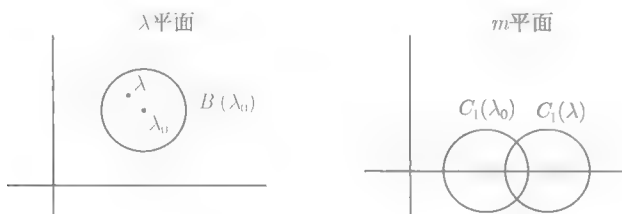


图 3.2

当 $b > 1$ 时, 对 $\lambda \in B_r(\lambda_0)$,

$$m_b(\lambda) \in \bigcup_{\lambda \in B_r(\lambda_0)} (C_1(\lambda) \text{ 连同内部}),$$

所以当 $b \geq 1$ 时, $m_b(\lambda)$ 对 $\lambda \in B_r(\lambda_0)$ 一致有界, 而 $m_b(\lambda)$ 是 λ 的半纯函数, 由于它在 $B_r(\lambda_0)$ 上一致有界, 因而不会有极点, 所以 $m_b(\lambda)$, $b \geq 1$ 都在 $B_r(\lambda_0)$ 上解析.

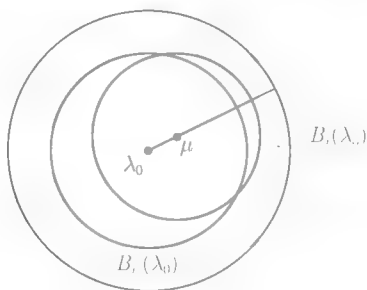


图 3.3

取 $0 < r_1 < r$. 考虑闭圆域 $B_{r_1}(\lambda_0)$, $\forall \mu \in B_{r_1}(\lambda_0)$, $m_b(\lambda)$ 在 $|\lambda - \mu| \leq |r - r_1|$ 上解析. 由 Cauchy 型积分的求导公式

$$m'_b(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \mu| = r - r_1} \frac{m_b(\lambda)}{(\lambda - \mu)^2} d\lambda$$

可得 (Cauchy 不等式)

$$|m'_b(\mu)| \leq \frac{1}{r - r_1} \sup_{\lambda \in B_r(\lambda_0), b \geq 1} |m_b(\lambda)|, \quad \mu \in B_{r_1}(\lambda_0) \textcircled{1},$$

这样 $m_b(\lambda)$ 便在 $B_{r_1}(\lambda_0)$ 上等度连续, 因此由 Arzela-Ascoli 定理, 存在一串 $b_j \rightarrow \infty$, 使得 $\{m_{b_j}(\lambda)\}$ 在 $B_{r_1}(\lambda_0)$ 上一致收敛到 $M(\lambda)$. 于是 $M(\lambda)$ 在 $B_{r_1}(\lambda_0)$ 上解析, 特

① $\frac{1}{2\pi i} \left| \int_0^{2\pi} \left| \frac{(r - r_1)ie^{i\tau}}{(r - r_1)^2 e^{2i\tau}} \right| d\tau = \frac{1}{r - r_1} \right|$

别地, 在 λ_0 解析^①.

(2) 因为 $m_b(\bar{\lambda}) = \overline{m_b(\lambda)}$, 所以 $M(\bar{\lambda}) = \overline{M(\lambda)}$.

(3) 由于 $M(\lambda)$ 在 $C_1(\lambda)$ 内部, 所以

$$0 < \int_0^1 |\varphi(x, \lambda) + M(\lambda)\theta(x, \lambda)|^2 dx \leq \frac{\operatorname{Im} M(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda}$$

(如果 $\varphi(x, \lambda) + M(\lambda)\theta(x, \lambda) = 0$, $0 \leq x \leq 1$, 则由微分方程解的唯一性知 $\varphi(x, \lambda) + M(\lambda)\theta(x, \lambda) \equiv 0$, 与 φ, θ 线性无关矛盾!). 于是 $\operatorname{Im} M(\lambda)$ 与 $\operatorname{Im} \lambda$ 同号.

(4) 由 (1) 和 (3), $M(\lambda)$ 的零点和极点必然在实轴上, 剩下来只需证明零点和极点都是简单的 ($M(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\varphi(b, \lambda)}{\theta(b, \lambda)}\right)$, 所以 $M(\lambda)$ 也可以定义在实轴上). 设 λ_0 是 $M(\lambda)$ 的零点, 如果它不是简单的, 则在 λ_0 附近有 $M(\lambda_0 + i\delta) = (\lambda_0 + i\delta - \lambda_0)^2 \cdot h(\lambda_0 + i\delta)$, h 解析. 于是

$$\frac{\operatorname{Im} M(\lambda_0 + i\delta)}{\operatorname{Im}(\lambda_0 + i\delta)} = \frac{-\delta^2 \operatorname{Im} h(\lambda_0 + i\delta)}{\delta} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow \pm 0.$$

由

$$\int_0^\infty |\varphi + M\theta|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} M(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda}, \quad \lambda = \lambda_0 + i\delta,$$

让 $\delta \rightarrow \pm 0$, 由 Fatou 引理得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \liminf_{\delta \rightarrow \pm 0} |\varphi + M\theta|^2 dx &\leq \lim_{\delta \rightarrow \pm 0} \inf \int_0^\infty |\varphi + M\theta|^2 dx \\ &= \lim_{\delta \rightarrow \pm 0} \frac{\operatorname{Im} M(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} = 0, \end{aligned}$$

即

$$\int_0^\infty |\varphi|^2 dx \leq 0.$$

可是 φ 为非平凡解, 矛盾. 所以零点是简单的. 对于极点的情形, 可以将 φ, θ 的位置倒一下.

$$y(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + \tilde{m}\varphi(x, \lambda).$$

由 b 点的边值

$$\cos \beta y(b, \lambda) + \sin \beta p(b) y'(b, \lambda) = 0,$$

^① $\{m_{b_n}(\lambda)\}$ 在 $C_r(\lambda_0)$ 上一致有界, $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{b_n} = M(\lambda)$, 其中, $\lambda \in C_r(\lambda_0)$, $C_r(\lambda_0)$ 是有极限点的集合, 所以由 Vitali 定理, 收敛是局部一致收敛.

Vitali 定理 设 $\{f_n(z)\}$ 在 G 内解析, 局部一致有界, 存在一串 $z_\nu \in G$, 它至少在 G 内有一个极限点, $\{f_n(z)\}$ 在每个 z_ν 点收敛, 则 $\{f_n(z)\}$ 在 G 上局部一致收敛.

$$\tilde{m} = -\frac{\cos \beta \theta(b, \lambda) + \sin \beta p(b) \theta'(b, \lambda)}{\cos \beta \varphi(b, \lambda) + \sin \beta p(b) \varphi'(b, \lambda)} = \frac{1}{m},$$

$$\widetilde{M}(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{\theta(b, \lambda)}{\varphi(b, \lambda)} = \frac{1}{M(\lambda)},$$

$\widetilde{M}(\lambda)$ 零点简单, 即 $M(\lambda)$ 极点简单. 如果 λ_0 是 $M(\lambda)$ 的极点, 则

$$M(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n,$$

$$M(\lambda_0 + i\delta) = \frac{\alpha}{i\delta} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (i\delta)^n = -\frac{i\alpha}{\delta} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (i\delta)^n,$$

当 $\delta \rightarrow +0$ 时, 有 $\operatorname{Im} M(\lambda_0 + i\delta) \rightarrow +\infty$ (注意 $\frac{\operatorname{Im} M(\lambda_0 + i\delta)}{\operatorname{Im}(\lambda_0 + i\delta)} > 0$!). 但是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (i\delta)^n$ 中的虚部趋于一个确定的极限, 故 $\alpha < 0$, 即 $\operatorname{Res}_{\lambda_0} M(\lambda) < 0$.

如果 M 在 ∞ 是极限圆的, 则对任何满足 $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ 的 λ ,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} C_b(\lambda) = C_{\infty}(\lambda),$$

这时 $\lim_{b \rightarrow \infty} m_b(\lambda)$ 的极限不唯一, Weyl 函数怎样定义呢? 假设 $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, $\widehat{m}_{\infty}(\lambda_0) \in C_{\infty}(\lambda_0)$, 存在 b_n 和 β_n 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\lambda_0, b_n, \beta_n) = \widehat{m}_{\infty}(\lambda_0).$$

记 $m_n(\lambda) = m(\lambda, b_n, \beta_n)$, 这是一个 λ 的半纯函数, 满足 $\overline{m_n(\lambda)} = m_n(\bar{\lambda})$. 注意到函数

$$y_n(x, \lambda_0) = \varphi(x, \lambda_0) + m_n(\lambda_0) \theta(x, \lambda_0),$$

$$y_n(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + m_n(\lambda) \theta(x, \lambda),$$

在点 b_n 满足同样的边条件

$$\cos \beta_n y(b_n) + \sin \beta_n p(b_n) y'(b_n) = 0,$$

所以

$$\begin{vmatrix} y_n(b_n, \lambda) & p(b_n) y'_n(b_n, \lambda) \\ y_n(b_n, \lambda_0) & p(b_n) y'_n(b_n, \lambda_0) \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$p(b_n) W(y_n(\cdot, \lambda), y_n(\cdot, \lambda_0))(b_n) = 0,$$

$$\left[y_n(\cdot, \lambda), \overline{y_n(\cdot, \lambda_0)} \right] (b_n) = 0,$$

$$\left[y_n(\cdot, \lambda), y_n(\cdot, \overline{\lambda_0}) \right] (b_n) = 0,$$

$$\left[\varphi(\cdot, \lambda) + m_n(\lambda)\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + m_n(\overline{\lambda_0})\theta(\cdot, \overline{\lambda_0}) \right] (b_n) = 0,$$

$$\left[\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + m_n(\overline{\lambda_0})\theta(\cdot, \overline{\lambda_0}) \right] (b_n) + m_n(\lambda).$$

$$\left[\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + m_n(\overline{\lambda_0})\theta(\cdot, \overline{\lambda_0}) \right] (b_n) = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} m_n(\lambda) = & - \frac{\left[\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + m_n(\overline{\lambda_0})\theta(\cdot, \overline{\lambda_0}) \right] (b_n)}{\left[\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + m_n(\overline{\lambda_0})\theta(\cdot, \overline{\lambda_0}) \right] (b_n)} \\ & - \frac{\left[\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) \right] (b_n) + m_n(\lambda_0) \left[\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0}) \right] (b_n)}{\left[\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) \right] (b_n) + m_n(\lambda_0) \left[\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0}) \right] (b_n)} \in C_{b_n}(\lambda). \end{aligned}$$

为了考虑 $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(\lambda)$, 先证明两个引理.

引理 3.4.1 设 G 是 λ 平面上的有界区域, 则当 $b \rightarrow \infty$ 时, $[\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0})](b)$, $[\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b)$, $[\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0})](b)$ 和 $[\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b)$ 都在 G 上一致收敛, 极限 $[\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty)$, $[\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty)$, $[\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty)$ 和 $[\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty)$ 是 λ 的整函数.

证明 由 Green 公式

$$\begin{aligned} & \int_0^b (\theta(x, \lambda_0)M\varphi(x, \lambda) - \varphi(x, \lambda)M\theta(x, \lambda_0)) dx \\ & = [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) - [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](0), \end{aligned}$$

注意到

$$M\varphi(x, \lambda) = \lambda\varphi(x, \lambda),$$

$$M\theta(x, \lambda_0) = \lambda_0\theta(x, \lambda_0),$$

$$[\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](0) = p(0)W(\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \lambda_0))(0) = 1,$$

可得

$$(\lambda - \lambda_0) \int_0^b \varphi(x, \lambda)\theta(x, \lambda_0)dx = [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) - 1,$$

存在 $\alpha \in \mathbf{R}$, 使得 $\lambda \in G$ 时,

$$|\lambda - \lambda_0| < \alpha.$$

设 $b_2 > b_1$, 则

$$\begin{aligned}
 & \left| [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b_2) - [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b_1) \right| \\
 &= \left| (\lambda - \lambda_0) \int_{b_1}^{b_2} \varphi(x, \lambda) \theta(x, \lambda_0) dx \right| \\
 &< \alpha \|\varphi(\cdot, \lambda)\| \left(\int_{b_1}^{b_2} |\theta(x, \lambda_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &< C\alpha \left(\int_{b_1}^{b_2} |\theta(x, \lambda_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad b_1, b_2 \rightarrow \infty, \quad (\text{由推论 3.2.3})
 \end{aligned}$$

所以 $[\varphi(x, \lambda), \theta(x, \bar{\lambda}_0)](b)$ 当 $b \rightarrow \infty$ 时在 G 上一致收敛. 因为 $[\varphi(x, \lambda), \theta(x, \bar{\lambda}_0)](b)$ 是 λ 的整函数, 所以极限 $[\varphi(x, \lambda), \theta(x, \bar{\lambda}_0)](\infty)$ 在 G 上解析, 由于 G 是任一个有界区域, 故此极限为整函数.

引理 3.4.2
$$\begin{vmatrix} [f, u](x) & [f, v](x) \\ [g, u](x) & [g, v](x) \end{vmatrix} = [f, \bar{g}](x) [\bar{u}, v](x).$$

证明

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} [f, u](x) & [f, v](x) \\ [g, u](x) & [g, v](x) \end{vmatrix} &= [f, u](x)[g, v](x) - [f, v](x)[g, u](x) \\
 &= p^2(x) \left(\left(f(x) \overline{u'(x)} - f'(x) \overline{u(x)} \right) \left(g(x) \overline{v'(x)} - g'(x) \overline{v(x)} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(f(x) \overline{v'(x)} - f'(x) \overline{v(x)} \right) \left(g(x) \overline{u'(x)} - g'(x) \overline{u(x)} \right) \right) \\
 &= p^2(x) \left(f(x) g'(x) \left(\overline{u(x) v'(x)} - \overline{u'(x) v(x)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + f'(x) g(x) \left(\overline{u'(x) v(x)} - \overline{u(x) v'(x)} \right) \right) \\
 &= p^2(x) \left((f(x) g'(x) - f'(x) g(x)) \overline{(u(x) v'(x) - u'(x) v(x))} \right) \\
 &= p(x) W(f, g)(x) p(x) W(\bar{u}, \bar{v}) \\
 &= [f, \bar{g}](x) [\bar{u}, v](x).
 \end{aligned}$$

这样便有

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(\lambda) &= \frac{[\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0) [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty)}{[\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0) [\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty)} \\
 &= - \frac{[\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)] + \widehat{m}_\infty(\lambda_0) \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty)}{[\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)] + \widehat{m}_\infty(\lambda_0) \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty)},
 \end{aligned}$$

后者属于 $C_\infty(\lambda)$, 记为 $\widehat{m}_\infty(\lambda)$. 考虑到 (由引理 3.4.2)

$$\begin{vmatrix} [\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) & [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) \\ [\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) & [\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) \end{vmatrix} \\ = [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda})](b) [\varphi(\cdot, \lambda_0), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) = 1,$$

可得

$$\begin{vmatrix} [\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) & [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) \\ [\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) & [\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) \end{vmatrix} \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} \begin{vmatrix} [\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) & [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) \\ [\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) & [\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) \end{vmatrix} = 1.$$

因此分式线性变换

$$\hat{m}_\infty(\lambda_0) \rightarrow \hat{m}_\infty(\lambda) = - \frac{[\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) + \hat{m}_\infty(\lambda_0) [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty)}{[\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) + \hat{m}_\infty(\lambda_0) [\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty)}$$

是一一的. 同样,

$$\hat{m}_\infty(\lambda_0) = - \frac{[\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) + \hat{m}_\infty(\lambda) [\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty)}{[\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) + \hat{m}_\infty(\lambda) [\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty)},$$

由于

$$\begin{vmatrix} [\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) & [\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) \\ [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) & [\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) \end{vmatrix} = 1,$$

所以 $\hat{m}_\infty(\lambda) \rightarrow \hat{m}_\infty(\lambda_0)$ 也是一一的. 这样便给出了 $C_\infty(\lambda_0)$ 到 $C_\infty(\lambda)$ 的一个一一对应. 在 $C_\infty(\lambda_0)$ 上任取一点 $\hat{m}_\infty(\lambda_0)$ 便可唯一确定一点 $\hat{m}_\infty(\lambda) \in C_\infty(\lambda)$, 把它称为极限圆情形的 Weyl 函数, 这时 Weyl 函数并不唯一.

定义 3.4.2 设微分算式 M 在 ∞ 处为极限圆的, $\text{Im} \lambda_0 \neq 0$, 给定 $\hat{m}_\infty(\lambda_0) \in C_\infty(\lambda_0)$, 称

$$M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) = \hat{m}_\infty(\lambda)$$

为 M 的 Weyl 函数.

定理 3.4.2 设 M 在 ∞ 处为极限圆, $\text{Im} \lambda_0 \neq 0$, $\hat{m}_\infty(\lambda_0) \in C_\infty(\lambda_0)$, 则

(1) $M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))$ 是全平面上定义的半纯函数且

$$M(\bar{\lambda}, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) = \overline{M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))};$$

(2) λ 是 $M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))$ 的极点的充要条件是

$$(\lambda - \lambda_0) \int_0^\infty \theta(x, \lambda) (\varphi(x, \lambda_0) + \hat{m}_\infty(\lambda_0) \theta(x, \lambda_0)) dx = 1.$$

证明 (1)

$$M(\lambda, \widehat{m}_\infty(\lambda_0)) = -\frac{[\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + \overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty)}{[\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + \overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty)}$$

(本来只是对 $\text{Im}\lambda \neq 0$ 得到这个公式, 但它对 $\text{Im}\lambda = 0$ 也有意义!).

$$\begin{aligned} & [\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + \overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + \overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) \\ &= [\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + \overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](0) \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b ((\varphi(x, \lambda_0) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x, \lambda_0)) M\varphi(x, \lambda) \\ &\quad - \varphi(x, \lambda) M(\varphi(x, \lambda_0) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x, \lambda_0))) dx \\ &= \begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \alpha + \widehat{m}_\infty(\lambda_0) \cos \alpha \\ -\cos \alpha & -\cos \alpha + \widehat{m}_\infty(\lambda_0) \sin \alpha \end{vmatrix} \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b (\lambda - \lambda_0) \varphi(x, \lambda) (\varphi(x, \lambda_0) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x, \lambda_0)) dx \\ &= \widehat{m}_\infty(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \int_0^\infty \varphi(x, \lambda) (\varphi(x, \lambda_0) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x, \lambda_0)) dx. \end{aligned}$$

同样,

$$\begin{aligned} & [\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + \overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + \overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) \\ &= [\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + \overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](0) \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^b ((\varphi(x, \lambda_0) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x, \lambda_0)) M\theta(x, \lambda) \\ &\quad - \theta(x, \lambda) M(\varphi(x, \lambda_0) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x, \lambda_0))) dx \\ &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha + \widehat{m}_\infty(\lambda_0) \cos \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha + \widehat{m}_\infty(\lambda_0) \sin \alpha \end{vmatrix} \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^b (\lambda - \lambda_0) \theta(x, \lambda) (\varphi(x, \lambda_0) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x, \lambda_0)) dx \\ &= -1 + (\lambda - \lambda_0) \int_0^\infty \theta(x, \lambda) (\varphi(x, \lambda_0) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x, \lambda_0)) dx. \end{aligned}$$

于是, $M(\lambda, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))$ 的分子分母都是整函数, 如果分子, 分母都是 0, 则方程组

$$\begin{cases} [\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0) [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty) = 0, \\ [\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0) [\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty) = 0 \end{cases}$$

有非零解, 故

$$\begin{vmatrix} [\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) & [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) \\ [\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) & [\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) \end{vmatrix} = 0.$$

此为不可能, 所以分子, 分母不能同时为零, 因而 $M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))$ 是半纯函数.

(2) $M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))$ 的极点是 $[\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0) + \overline{\hat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty)$ 的零点. 反过来, 后者的零点必是分子不为零的点, 因而也是 $M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))$ 的极点.

由于

$$\frac{\operatorname{Im} m_n(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} = \int_0^{b_n} |\varphi(x, \lambda) + m_n(\lambda)\theta(x, \lambda)|^2 dx, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0,$$

记

$$\psi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))\theta(x, \lambda), \quad \psi_n(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + m_n(\lambda)\theta(x, \lambda),$$

则

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\operatorname{Im} M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))}{\operatorname{Im} \lambda} - \int_0^\infty |\psi(x, \lambda)|^2 dx \right| \\ & \leq \left| \frac{\operatorname{Im} M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))}{\operatorname{Im} \lambda} - \frac{\operatorname{Im} m_n(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} \right| + \left| \int_0^{b_n} |\psi_n(x, \lambda)|^2 dx - \int_0^\infty |\psi(x, \lambda)|^2 dx \right|, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{b_n} |\psi_n(x, \lambda)|^2 dx - \int_0^\infty |\psi(x, \lambda)|^2 dx \right| \\ & \leq \left| \int_0^{b_n} |\psi_n(x, \lambda)|^2 dx - \int_0^{b_n} |\psi(x, \lambda)|^2 dx \right| + \left| \int_{b_n}^\infty |\psi(x, \lambda)|^2 dx \right|, \\ & \left| \int_0^{b_n} |\psi_n(x, \lambda)|^2 dx - \int_0^{b_n} |\psi(x, \lambda)|^2 dx \right| \\ & = \left| \|\psi_n(\cdot, \lambda)\|_n^2 - \|\psi(\cdot, \lambda)\|_n^2 \right| \\ & = \left| \|\psi_n(\cdot, \lambda)\|_n - \|\psi(\cdot, \lambda)\|_n \right| \left(\|\psi_n(\cdot, \lambda)\|_n + \|\psi(\cdot, \lambda)\|_n \right) \\ & \leq \|\psi_n(\cdot, \lambda) - \psi(\cdot, \lambda)\|_n \left(\|\psi_n(\cdot, \lambda)\|_n + \|\psi(\cdot, \lambda)\|_n \right), \\ & \|\psi_n(\cdot, \lambda)\|_n = \|\varphi(\cdot, \lambda) + m_n(\lambda)\theta(\cdot, \lambda)\|_n \leq \|\varphi(\cdot, \lambda)\| + |m_n(\lambda)| \|\theta(\cdot, \lambda)\|, \end{aligned}$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(\lambda) = M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))$, 所以存在 $N_1 > 0$, 当 $n \geq N_1$ 时,

$$|m_n(\lambda)| < |M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))| + 1.$$

于是当 $n \geq N_1$ 时,

$$\|\psi_n(\cdot, \lambda)\|_n \leq \|\varphi(\cdot, \lambda)\| + (|M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))| + 1) \|\theta(\cdot, \lambda)\| < C,$$

$$\begin{aligned} \|\psi(\cdot, \lambda) - \psi_n(\cdot, \lambda)\|_n &= \|(M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) - m_n(\lambda)) \theta(\cdot, \lambda)\|_n \\ &\leq |M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) - m_n(\lambda)| \|\theta(\cdot, \lambda)\| \\ &< C |M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) - m_n(\lambda)|, \end{aligned}$$

所以当 $n \geq N_1$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{b_n} |\psi_n(x, \lambda)|^2 dx - \int_0^{b_n} |\psi(x, \lambda)|^2 dx \right| &\leq \|\psi(\cdot, \lambda) - \psi_n(\cdot, \lambda)\|_n (\|\psi(\cdot, \lambda)\| + C) \\ &\leq 2C^2 |M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) - m_n(\lambda)|. \end{aligned}$$

再取 N_2 , 使得当 $n \geq N_2$ 时,

$$|M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) - m_n(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{4C^2}.$$

再取 N_3 , 使得当 $n \geq N_3$ 时,

$$\left| \int_{b_n}^\infty |\psi(x, \lambda)|^2 dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n \geq N = \max(N_1, N_2, N_3)$ 时,

$$\left| \int_0^{b_n} |\psi_n(x, \lambda)|^2 dx - \int_0^\infty |\psi(x, \lambda)|^2 dx \right| < \varepsilon,$$

所以

$$\frac{\operatorname{Im} M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))}{\operatorname{Im} \lambda} = \int_0^\infty |\varphi(x, \lambda) + M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) \theta(x, \lambda)|^2 dx, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0,$$

即

$$\operatorname{Im} M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) = \operatorname{Im} \lambda \int_0^\infty |\varphi(x, \lambda) + M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) \theta(x, \lambda)|^2 dx, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0.$$

如果 $\operatorname{Im} \lambda = 0$, 由

$$\operatorname{Im} M(\lambda + i\delta, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) = \delta \int_0^\infty |\varphi(x, \lambda + i\delta) + M(\lambda + i\delta, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) \theta(x, \lambda + i\delta)|^2 dx,$$

利用推论 3.2.3 知

$$|\operatorname{Im} M(\lambda + i\delta, \hat{m}_\infty(\lambda_0))| < C |\delta|,$$

所以

$$\operatorname{Im} M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) = 0.$$

这说明

$$\operatorname{Im} \lambda \neq 0, \quad \operatorname{Im} M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) \neq 0,$$

$$\operatorname{Im} \lambda = 0, \quad \operatorname{Im} M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) = 0.$$

所以 $M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))$ 的零点在实轴上.

定理 3.4.3 $M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))$ 的零点和极点在实轴上, 都是简单的.

证明 如果 $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, 则 $M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) \in C_\infty(\lambda)$, 所以 λ 不是 $M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))$ 的极点. 因此极点也在实轴上. 零点简单的证明与定理 3.4.1 同, 极点简单的证明见下一节.

3.5 Weyl 解

在极限点情形下, Weyl 解是唯一的, 即

$$\psi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + M(\lambda)\theta(x, \lambda).$$

在极限圆情形, 对任意的 $\hat{m}_\infty(\lambda_0) \in C_\infty(\lambda_0)$, Weyl 解为

$$\psi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))\theta(x, \lambda),$$

它依赖于 $\hat{m}_\infty(\lambda_0)$ 的选取.

定理 3.5.1 (Titchmarsh) Weyl 解有下列性质 (λ, λ' 为非实数):

$$(1) \quad \psi(x, \bar{\lambda}) = \overline{\psi(x, \lambda)};$$

(2)

$$\lim_{b \rightarrow \infty} [\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda')](b) = 0;$$

(3).

$$\int_0^\infty \psi(x, \lambda) \psi(x, \lambda') dx = \frac{M(\lambda) - M(\lambda')}{\lambda - \lambda'} \left(\frac{M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) - M(\lambda', \hat{m}_\infty(\lambda_0))}{\lambda - \lambda'} \right);$$

$$(4) \quad \int_0^\infty |\psi(x, \lambda)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} M(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} \left(\frac{\operatorname{Im} M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))}{\operatorname{Im} \lambda} \right).$$

证明 (1) 因为

$$\varphi(x, \bar{\lambda}) = \overline{\varphi(x, \lambda)}, \quad \theta(x, \bar{\lambda}) = \overline{\theta(x, \lambda)}, \quad M(\bar{\lambda}) = \overline{M(\lambda)},$$

所以

$$\psi(x, \bar{\lambda}) = \overline{\psi(x, \lambda)}.$$

(2)

(i) 极限点情形.

在点 b , $\varphi(x, \lambda) + m_b(\lambda)\theta(x, \lambda)$ 满足

$$\cos \beta y(b) + \sin \beta p(b)y'(b) = 0,$$

这是一个与 λ 无关的边界条件, 所以

$$\begin{aligned} 0 &= [\varphi(\cdot, \lambda) + m_b(\lambda)\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \lambda') + m_b(\lambda')\theta(\cdot, \lambda')](b) \\ &= [\psi(\cdot, \lambda) + (m_b(\lambda) - M(\lambda))\theta(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda') + (m_b(\lambda') - M(\lambda'))\theta(\cdot, \lambda')](b) \\ &= [\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda')](b) + (m_b(\lambda) - M(\lambda))[\theta(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda')](b) \\ &\quad + \overline{(m_b(\lambda') - M(\lambda'))}[\psi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \lambda')](b) \\ &\quad + (m_b(\lambda) - M(\lambda))\overline{(m_b(\lambda') - M(\lambda'))}[\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \lambda')](b), \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} [\theta(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda')](b) &= [\theta(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda')](0) \\ &\quad + \int_0^b (\overline{\psi(x, \lambda')} M\theta(x, \lambda) - \theta(x, \lambda) \overline{M\psi(x, \lambda')}) dx \\ &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha + M(\lambda') \cos \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha + M(\lambda') \sin \alpha \end{vmatrix} + (\lambda - \bar{\lambda}') \int_0^b \theta(x, \lambda) \overline{\psi(x, \lambda')} dx \\ &= -1 + (\lambda - \bar{\lambda}') \int_0^b \theta(x, \lambda) \overline{\psi(x, \lambda')} dx, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} |[\theta(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda')](b)| &\leq 1 + |\lambda - \bar{\lambda}'| \left(\int_0^b |\theta(x, \lambda)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty |\psi(x, \lambda')|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + O \left(\left(\int_0^b |\theta(x, \lambda)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= 1 + O \left(\frac{1}{\sqrt{r_b}} \right), \end{aligned}$$

另外

$$|m_b(\lambda) - M(\lambda)| \leq 2r_b, \quad \lim_{b \rightarrow \infty} C_b(\lambda) = M(\lambda), \quad \bigcap_{b>0} \{C_b(\lambda) \text{ 及其内部} \} = \{M(\lambda)\},$$

所以

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{b \rightarrow \infty} |(m_b(\lambda) - M(\lambda))[\theta(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda')](b)| \\ &\leq \lim_{b \rightarrow \infty} \left| 2r_b \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{r_b}}\right) \right) \right| = \lim_{b \rightarrow \infty} (2r_b + O(\sqrt{r_b})) = 0. \end{aligned}$$

类似地, 可以证明

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \overline{(m_b(\lambda') - M(\lambda'))}[\psi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \lambda')](b) &= 0, \\ \lim_{b \rightarrow \infty} (m_b(\lambda) - M(\lambda))\overline{(m_b(\lambda') - M(\lambda'))}[\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \lambda')](b) &= 0, \end{aligned}$$

故

$$\lim_{b \rightarrow \infty} [\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda')](b) = 0.$$

(ii) 极限圆情形.

想要 $\lim_{b \rightarrow \infty} [\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda')](b) = 0$, 考虑

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} [\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) & [\psi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) \\ [\psi(\cdot, \overline{\lambda'}), \psi(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) & [\psi(\cdot, \overline{\lambda'}), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) \end{vmatrix} \\ &= [\psi(\cdot, \lambda_0), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) [\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda')](b). \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} [\psi(\cdot, \lambda_0), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) &= [\varphi(\cdot, \lambda_0) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(\cdot, \lambda_0), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) \\ &= [\varphi(\cdot, \lambda_0), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)[\theta(\cdot, \lambda_0), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) \\ &= p(b)W(\varphi(\cdot, \lambda_0), \theta(\cdot, \lambda_0))(b) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)p(b)W(\theta(\cdot, \lambda_0), \theta(\cdot, \lambda_0))(b) \\ &= p(b)W(\varphi(\cdot, \lambda_0), \theta(\cdot, \lambda_0))(b) = p(0)W(\varphi(\cdot, \lambda_0), \theta(\cdot, \lambda_0))(0) = 1, \end{aligned}$$

所以

$$[\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda')](b) = \begin{vmatrix} [\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) & [\psi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) \\ [\psi(\cdot, \overline{\lambda'}), \psi(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) & [\psi(\cdot, \overline{\lambda'}), \theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) \end{vmatrix}.$$

而

$$\begin{aligned} [\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) &= [\varphi(\cdot, \lambda) + M(\lambda, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))\theta(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) \\ &= [\varphi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) + M(\lambda, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))[\theta(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \overline{\lambda_0})](b) \\ &\rightarrow [\varphi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty) + M(\lambda, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))[\theta(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty) = 0 \end{aligned}$$

$$\left(M(\lambda, \widehat{m}_\infty(\lambda_0)) = -\frac{[\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty)}{[\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \overline{\lambda_0}) + \widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(\cdot, \overline{\lambda_0})](\infty)} \right),$$

$$\begin{aligned}
[\psi(\cdot, \bar{\lambda}'), \psi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) &= [\varphi(\cdot, \bar{\lambda}') + M(\bar{\lambda}', \hat{m}_\infty(\lambda_0)) \theta(\cdot, \bar{\lambda}'), \psi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) \\
&= [\varphi(\cdot, \bar{\lambda}'), \psi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) + M(\bar{\lambda}', \hat{m}_\infty(\lambda_0)) [\theta(\cdot, \bar{\lambda}'), \psi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) \\
&\rightarrow [\varphi(\cdot, \bar{\lambda}'), \psi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) + M(\bar{\lambda}', \hat{m}_\infty(\lambda_0)) \\
&\quad [\theta(\cdot, \bar{\lambda}'), \psi(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\psi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) &= [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) + M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) [\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) \\
&\rightarrow [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) + M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) [\theta(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty)
\end{aligned}$$

(由引理 3.4.1 知道极限存在!),

$$\begin{aligned}
[\psi(\cdot, \bar{\lambda}'), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) &= [\varphi(\cdot, \bar{\lambda}'), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) + M(\bar{\lambda}', \hat{m}_\infty(\lambda_0)) [\theta(\cdot, \bar{\lambda}'), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](b) \\
&\rightarrow [\varphi(\cdot, \bar{\lambda}'), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty) + M(\bar{\lambda}', \hat{m}_\infty(\lambda_0)) [\theta(\cdot, \bar{\lambda}'), \theta(\cdot, \bar{\lambda}_0)](\infty),
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{b \rightarrow \infty} [\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda')](b) = 0.$$

(3) 由 Green 公式

$$\begin{aligned}
&\int_0^b (\psi(x, \lambda') M \psi(x, \lambda) - \psi(x, \lambda) M \psi(x, \lambda')) dx \\
&= [\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \bar{\lambda}')] (b) - [\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \bar{\lambda}')] (0),
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
[\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \bar{\lambda}')] (0) &= p(0) W(\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda'))(0) \\
&= p(0) W(\varphi(\cdot, \lambda) + M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) \theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \lambda') \\
&\quad + M(\lambda', \hat{m}_\infty(\lambda_0)) \theta(\cdot, \lambda'))(0) \\
&= p(0) M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) W(\theta(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \lambda'))(0) \\
&\quad + p(0) M(\lambda', \hat{m}_\infty(\lambda_0)) W(\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \lambda'))(0) \\
&= M(\lambda', \hat{m}_\infty(\lambda_0)) - M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \lambda') \int_0^b \psi(x, \lambda) \psi(x, \lambda') dx \\
&= [\psi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \bar{\lambda}')] (b) - (M(\lambda', \hat{m}_\infty(\lambda_0)) - M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))).
\end{aligned}$$

让 $b \rightarrow \infty$ 得

$$\int_0^\infty \psi(x, \lambda) \psi(x, \lambda') dx = \frac{M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) - M(\lambda', \hat{m}_\infty(\lambda_0))}{\lambda - \lambda'}.$$

极限点的情形证明是一样的。

(4) 取 $\lambda' = \bar{\lambda}$, 由 (3) 便可得

$$\int_0^\infty |\psi(x, \lambda)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} M(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda}.$$

推论 3.5.1 若 $M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))$ 有极点, 则必为简单的.

证明 设 μ_0 是它的 k 阶极点, $k > 1$, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu_0} (\lambda - \mu_0)^k M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) = \alpha \neq 0.$$

设 $\lambda = \mu_0 + i\nu$, 则

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} (i\nu)^k M(\mu_0 + i\nu, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) = \alpha \neq 0.$$

对于固定的 A ,

$$\int_0^A |\psi(x, \lambda)|^2 dx \leq \frac{\operatorname{Im} M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))}{\operatorname{Im} \lambda}.$$

以 $\lambda = \mu_0 + i\nu$ 代入, 并乘两边以 ν^{2k} 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^A |(i\nu)^k \varphi(x, \mu_0 + i\nu) + (i\nu)^k M(\mu_0 + i\nu, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) \theta(x, \mu_0 + i\nu)|^2 dx \\ & \leq \nu^{2k-1} \operatorname{Im} M(\mu_0 + i\nu, \hat{m}_\infty(\lambda_0)) \\ & \leq |\nu|^{2k-1} |M(\mu_0 + i\nu, \hat{m}_\infty(\lambda_0))|. \end{aligned}$$

让 $\nu \rightarrow 0$ 便得

$$|\alpha|^2 \int_0^A |\theta(x, \mu_0)|^2 dx \leq 0,$$

矛盾!

3.6 $T_0(M)$ 的自伴延拓

前面已经考虑了 $T_0(M)$ 的亏指数, 并研究了方程 $My = \lambda y$ 属于 $L^2[0, \infty)$ 的解有哪些性质, 现在来求 $T_0(M)$ 的自伴延拓.

定理 3.6.1 设 M 在 ∞ 为极限点, T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓, 则

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \sin \theta f(0) - \cos \theta p(0) f'(0) = 0\}.$$

证明 由对称算子自伴延拓的 Calkin 描述知道

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \langle f, f_1 \rangle = 0\},$$

其中, f_1 模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关且满足 $\langle f_1, f_1 \rangle = 0$. 取 $a > 0$, h_1, h_2 是实的无穷次可微函数, 满足

$$h_1(0) = 1, \quad p(0)h_1'(0) = 0, \quad h_2(0) = 0, \quad p(0)h_2'(0) = 1, \quad \text{supp} h_i \subset [0, a], \quad i = 1, 2,$$

则 h_1, h_2 模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关. 这样 $\mathcal{D}(T_1(M))/\mathcal{D}(T_0(M))$ 都是 h_1, h_2 的线性组合, 所以令 $f_1 = \omega h_1 + \delta h_2$, 只要 ω, δ 不同时为零, f_1 便是模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关的函数. 由于

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_1 \rangle &= [f_1, f_1]_0^\infty = -[f_1, f_1](0) \\ &= -(|\omega|^2 [h_1, h_1](0) + \omega \bar{\delta} [h_1, h_2](0) + \bar{\omega} \delta [h_2, h_1](0) + |\delta|^2 [h_2, h_2](0)) \\ &= -(\omega \bar{\delta} - \bar{\omega} \delta) [h_1, h_2](0) = -(\omega \bar{\delta} - \bar{\omega} \delta) p(0) W(h_1, \bar{h}_2)(0) \\ &= -(\omega \bar{\delta} - \bar{\omega} \delta) = -2\text{Im} \omega \bar{\delta}. \end{aligned}$$

所以当取 ω, δ 使 $\text{Im} \omega \bar{\delta} = 0$ 时, f_1 满足条件 $\langle f_1, f_1 \rangle = 0$, 而

$$\begin{aligned} \langle f, f_1 \rangle &= -[f, f_1](0) = -\bar{\omega} [f, h_1](0) - \bar{\delta} [f, h_2](0) \\ &= -\bar{\omega} p(0) W(f, \bar{h}_1)(0) - \bar{\delta} p(0) W(f, \bar{h}_2)(0) \\ &= \bar{\omega} p(0) f'(0) - \bar{\delta} f(0). \end{aligned}$$

这样, 条件 $\langle f, f_1 \rangle = 0$ 便变成

$$\bar{\delta} f(0) - \bar{\omega} p(0) f'(0) = 0.$$

设 $\omega = a + ib, \delta = c + id$, 则

$$\omega \bar{\delta} = (a + ib)(c - id) = (ac + bd) + i(bc - ad).$$

由于 $\text{Im} \omega \bar{\delta} = 0$, 所以

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

这就是说,

$$\omega = a + ib = \lambda(c + id) = \lambda \delta \quad \text{或} \quad \delta = \mu \omega, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

如果 $\omega \neq 0$, 则

$$p(0) f'(0) - \mu f(0) = 0.$$

将 μ 表示成 $\tan \theta$ 得

$$\sin \theta f(0) - \cos \theta p(0) f'(0) = 0.$$

如果 $\delta \neq 0$, 则

$$f(0) - \lambda p(0)f'(0) = 0.$$

将 λ 表示成 $\cot \theta$ 得 $\sin \theta f(0) - \cos \theta p(0)f'(0) = 0$.

可见在极限点情形, 为了得到自伴延拓域, 只需要在常型端点加上边界条件便行了.

例 3.6.1 $M = -D^2, x \in [0, \infty)$. M 在 ∞ 为极限点, 亏指数为 $(1, 1)$. 如果 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓, 则 $\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \sin \theta f(0) - \cos \theta f'(0) = 0\}$, $\theta \in \mathbf{R}$.

下面考虑极限圆情形的自伴延拓.

引理 3.6.1 对任意的 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 和 β_1, \dots, β_n , 存在 $f \in C^\infty[a, b]$ 使得

$$f^{(k-1)}(a) = \alpha_k, \quad f^{(k-1)}(b) = \beta_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

证明 设 $P(x)$ 是 n 阶多项式, 令

$$\begin{cases} P(b) = \beta_1, \\ P'(b) = \beta_2, \\ \dots \\ P^{(n-1)}(b) = \beta_n, \end{cases}$$

$n+1$ 个未知数只有 n 个方程, 总有解. 作 $p(x)$ 使得 $p \in C^\infty(\mathbf{R})$ 且

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\infty, \frac{3a+b}{4}\right], \\ 1, & x \in \left[\frac{a+3b}{4}, \infty\right), \end{cases}$$

则 $u = Pp \in C^\infty[a, b]$ 满足

$$\begin{aligned} u(b) &= \beta_1, \quad u'(b) = \beta_2, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(b) = \beta_n, \\ u(a) &= u'(a) = \dots = u^{(n-1)}(a) = 0, \end{aligned}$$

同样可得 $v \in C^\infty[a, b]$, 使得

$$\begin{aligned} v(b) &= v'(b) = \dots = v^{(n-1)}(b) = 0, \\ v(a) &= \alpha_1, \quad v(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad v^{(n-1)}(a) = \alpha_n. \end{aligned}$$

令 $f = u + v$ 即可.

定理 3.6.2 设微分算子 M 在 ∞ 为极限圆, $\psi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + M(\lambda, \widehat{m}_\infty(\lambda_0)) \cdot \theta(x, \lambda)$ 是它的一个 Weyl 解, 则

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \sin \alpha f(0) - \cos \alpha p(0)f'(0) = 0, \quad [f, \psi](\infty) = 0\}$$

是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓域, 称为 $T_0(M)$ 的 Weyl-Titchmarsh 域.

证明 由于 $\theta(\cdot, \lambda)$ 和 $\psi(\cdot, \lambda) \in L^2[0, \infty)$, 作 f_1, f_2 如下:

$$f_1(x) = \begin{cases} \theta(x, \lambda), & 0 \leq x \leq a, \\ u(x), & a \leq x \leq b, \\ 0, & b \leq x \leq \infty, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ v(x), & a \leq x \leq b, \\ \psi(x, \lambda), & b \leq x < \infty. \end{cases}$$

其中, $u, v \in C^\infty[a, b]$ 满足

$$u(a) = \theta(a, \lambda), \quad u'(a) = \theta'(a, \lambda), \quad u(b) = 0, \quad u'(b) = 0,$$

$$v(a) = v'(a) = 0, \quad v(b) = \psi(b, \lambda), \quad v'(b) = \psi'(b, \lambda).$$

显然, $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(T_1(M))$, 因为

$$\langle f_1, \theta \rangle = [f_1, \theta]_0^\infty = -[f_1, \theta](0) = -[\theta, \theta](0) = -p(0)W(\theta, \bar{\theta})(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \langle f_1, \psi \rangle &= [f_1, \psi]_0^\infty = -[f_1, \psi](0) = -[\theta, \psi](0) \\ &= -p(0)W(\theta, \bar{\psi})(0) = -p(0)W(\theta, \bar{\varphi})(0) = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f_2, \theta \rangle &= [f_2, \theta]_0^\infty = [f_2, \theta](\infty) = [\psi, \theta](\infty) \\ &= [\varphi, \theta](\infty) + M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))[\theta, \theta](\infty) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} ([\varphi, \theta](b) + M(\lambda, \hat{m}_\infty(\lambda_0))[\theta, \theta](b)) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\varphi, \theta](b) = \lim_{b \rightarrow \infty} p(b)W(\varphi, \bar{\theta})(b) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} p(0)W(\varphi, \bar{\theta})(0) = 1, \end{aligned}$$

$$\langle f_2, \psi \rangle = [f_2, \psi]_0^\infty = [f_2, \psi](\infty) = [\psi, \psi](\infty) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \langle f_1, \theta \rangle & \langle f_1, \psi \rangle \\ \langle f_2, \theta \rangle & \langle f_2, \psi \rangle \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

所以 f_1, f_2 模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关. 另外

$$\langle f_1, f_1 \rangle = [f_1, f_1]_0^\infty = -[\theta, \theta](0) = 0,$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = [f_1, f_2]_0^\infty = 0,$$

$$\langle f_2, f_2 \rangle = [f_2, f_2]_0^\infty = [\psi, \psi](\infty) = 0,$$

所以

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \langle f, f_1 \rangle = \langle f, f_2 \rangle = 0\}$$

是 $T_0(M)$ 的自伴延拓域. 而

$$\langle f, f_1 \rangle = -[f, \theta](0) = -p(0)W(f, \bar{\theta})(0) = -(\sin \alpha f(0) - \cos \alpha p(0)f'(0)),$$

$$\langle f, f_2 \rangle = [f, \psi](\infty),$$

故

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \sin \alpha f(0) - \cos \alpha p(0)f'(0) = 0, [f, \psi](\infty) = 0\}.$$

引理 3.6.2 设 $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0, \operatorname{Im} \lambda_1 \neq 0$, 则对任意的 $f \in \mathcal{D}(T_1(M)), [f, \psi(\cdot, \lambda_0)](\infty) = 0$ 的充要条件是 $[f, \psi(\cdot, \lambda_1)](\infty) = 0$ (即与 λ 无关).

证明

$$\begin{vmatrix} [f, \psi(\cdot, \lambda_0)](x) & [f, \theta(\cdot, \lambda_0)](x) \\ [\psi(\cdot, \bar{\lambda}_1), \psi(\cdot, \lambda_0)](x) & [\psi(\cdot, \bar{\lambda}_1), \theta(\cdot, \lambda_0)](x) \end{vmatrix} = [f, \psi(\cdot, \lambda_1)](x) [\psi(\cdot, \bar{\lambda}_0), \theta(\cdot, \lambda_0)](x),$$

$$\begin{aligned} [\psi(\cdot, \bar{\lambda}_0), \theta(\cdot, \lambda_0)](x) &= [\varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0), \theta(\cdot, \lambda_0)](x) + \overline{M(\lambda_0, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))} [\theta(\cdot, \bar{\lambda}_0), \theta(\cdot, \lambda_0)](x) \\ &= [\varphi(\cdot, \bar{\lambda}_0), \theta(\cdot, \lambda_0)](0) + \overline{M(\lambda_0, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))} [\theta(\cdot, \bar{\lambda}_0), \theta(\cdot, \lambda_0)](0) = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\psi(\cdot, \bar{\lambda}_1), \theta(\cdot, \lambda_0)](x) &= [\varphi(\cdot, \bar{\lambda}_1), \theta(\cdot, \lambda_0)](x) + \overline{M(\lambda_1, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))} [\theta(\cdot, \bar{\lambda}_1), \theta(\cdot, \lambda_0)](x) \\ &= [\varphi(\cdot, \bar{\lambda}_1), \theta(\cdot, \lambda_0)](0) + \overline{M(\lambda_1, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))} [\theta(\cdot, \bar{\lambda}_1), \theta(\cdot, \lambda_0)](0) = 1, \end{aligned}$$

而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\psi(\cdot, \bar{\lambda}_1), \psi(\cdot, \lambda_0)](x) = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [f, \theta(\cdot, \lambda_0)](x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left([f, \theta(\cdot, \lambda_0)](0) + \int_0^x \left(M f(t) \overline{\theta(t, \lambda_0)} - f(t) \overline{M \theta(t, \lambda_0)} \right) dt \right) \\ &= [f, \theta(\cdot, \lambda_0)](0) + \int_0^\infty \left(M f(t) \overline{\theta(t, \lambda_0)} - f(t) \overline{M \theta(t, \lambda_0)} \right) dt. \end{aligned}$$

故得

$$[f, \psi(\cdot, \lambda_0)](\infty) = [f, \psi(\cdot, \lambda_1)](\infty).$$

推论 3.6.1 给定 $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0, \widehat{m}_\infty(\lambda_0) \in C_\infty(\lambda_0), T_0(M)$ 就有一个 Weyl-Titchmarsh 自伴延拓 T

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T) &= \{f \mid f \in \mathcal{D}(T_1(M)), \sin \alpha f(0) - \cos \alpha p(0)f'(0) = 0, [f, \psi(\cdot, \lambda_0)](\infty) = 0\} \\ &= \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \sin \alpha f(0) - \cos \alpha p(0)f'(0) = 0, [f, \psi(\cdot, \lambda)](\infty) = 0, \operatorname{Im} \lambda \neq 0\}. \end{aligned}$$

从这里可以看到, 极限圆情形的自伴延拓域要在常型端点和奇型端点都加上边界条件, 不过这两个边界条件是分离的. 但是 Weyl-Titchmarsh 域并不是全部的 $T_0(M)$ 的自伴延拓域. 由于极限点情形下, $[f, \psi](\infty) = 0$ 自然成立. 所以在极限点

情形, $T_0(M)$ 的自伴延拓域都是 Weyl-Titchmarsh 域. 下面给出一般的 $T_0(M)$ 的自伴延拓域.

引理 3.6.3 设 M 是极限圆的, 则对任意的 $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, 存在 $h \in \mathcal{D}(T_1(M))$, 使得

$$h(0) = a, \quad h'(0) = b, \quad [h, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) = c, \quad [h, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) = d,$$

其中, λ 是实数.

证明 对实的 λ , 有

$$0 = (M\varphi, \theta) - (\varphi, M\theta) = [\varphi, \theta](\infty) - [\varphi, \theta](0),$$

所以

$$[\varphi, \theta](\infty) = 1.$$

同理,

$$[\varphi, \varphi](\infty) = [\theta, \theta](\infty) = 0, \quad [\theta, \varphi](\infty) = -1.$$

令 $f_2 = d\varphi(\cdot, \lambda) - c\theta(\cdot, \lambda)$, 则

$$[f_2, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) = c, \quad [f_2, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) = d.$$

取 $l \in (0, \infty)$, 由引理 3.6.1, 存在 $f_1 \in C^\infty[0, l]$, 使得

$$\begin{aligned} f_1(0) &= a, \quad f_1'(0) = b, \quad f_1''(0) = 0, \\ f_1(l) &= f_2(l), \quad f_1'(l) = f_2'(l), \quad f_1''(l) = f_2''(l), \end{aligned}$$

令

$$h(x) = \begin{cases} f_1(x), & 0 \leq x \leq l, \\ f_2(x), & l < x < \infty \end{cases}$$

即可.

定理 3.6.3 设 M 是极限圆的, $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(T_1(M))$ 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓定义域的充分必要条件是存在二阶矩阵 L 和 N , 使得

$$(1) \operatorname{rank}(L \ N) = 2;$$

$$(2) \begin{vmatrix} l_{i1} & \overline{l_{j1}} \\ l_{i2} & \overline{l_{j2}} \end{vmatrix} = p(0) \begin{vmatrix} n_{i1} & \overline{n_{j1}} \\ n_{i2} & \overline{n_{j2}} \end{vmatrix}, \quad i, j = 1, 2;$$

$$(3) \mathcal{D} = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \left| L \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} [f, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) \\ [f, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) \end{pmatrix} = 0 \right. \right\}, \text{ 这里 } \lambda$$

是个实数.

证明 \Rightarrow 由 Calkin 抽象边条件描述, 存在 $h_1, h_2 \in \mathcal{D}(T_1(M))$, 使得 h_1, h_2 模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关,

$$\langle h_i, h_j \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \langle f, h_i \rangle = 0, i = 1, 2\}.$$

因为

$$[f, g](x) = \begin{vmatrix} [f, \varphi(\cdot, \lambda)](x) & [f, \theta(\cdot, \lambda)](x) \\ [\bar{g}, \varphi(\cdot, \lambda)](x) & [\bar{g}, \theta(\cdot, \lambda)](x) \end{vmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} \langle f, h_i \rangle &= [f, h_i]_0^\infty \\ &= [\bar{h}_i, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) [f, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) \\ &\quad - [\bar{h}_i, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) [f, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) - p(0) \begin{vmatrix} f(0) & \bar{h}_i(0) \\ f'(0) & \bar{h}_i'(0) \end{vmatrix} \\ &= l_{i1} f(0) + l_{i2} f'(0) + n_{i1} [f, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) + n_{i2} [f, \theta(\cdot, \lambda)](\infty), \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} l_{i1} &= -p(0) \overline{h_i'(0)}, \quad l_{i2} = p(0) \overline{h_i(0)}, \\ n_{i1} &= [\bar{h}_i, \theta(\cdot, \lambda)](\infty), \quad n_{i2} = -[\bar{h}_i, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty), \end{aligned} \quad i = 1, 2.$$

记

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix},$$

则

$$\langle f, h_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2 \Leftrightarrow L \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} [f, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) \\ [f, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) \end{pmatrix} = 0.$$

而 $\langle h_j, h_i \rangle = 0$, 即

$$l_{i1} h_j(0) + l_{i2} h_j'(0) + n_{i1} [h_j, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) + n_{i2} [h_j, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) = 0$$

或

$$\begin{aligned} \frac{l_{i1} \overline{l_{j2}}}{p(0)} - \frac{l_{i2} \overline{l_{j1}}}{p(0)} - n_{i1} \overline{n_{j2}} + n_{i2} \overline{n_{j1}} &= 0, \\ \begin{vmatrix} l_{i1} & \overline{l_{j1}} \\ l_{i2} & \overline{l_{j2}} \end{vmatrix} &= p(0) \begin{vmatrix} n_{i1} & \overline{n_{j1}} \\ n_{i2} & \overline{n_{j2}} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

如果 $\text{rank}(L \ N) \leq 1$, 则

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -p(0) \overline{h_1'(0)} & p(0) \overline{h_1(0)} & [\bar{h}_1, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) & -[\bar{h}_1, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) \\ -p(0) \overline{h_2'(0)} & p(0) \overline{h_2(0)} & [\bar{h}_2, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) & -[\bar{h}_2, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) \end{pmatrix} \leq 1.$$

于是

$$\overline{h'_2(0)} = c\overline{h'_1(0)}, \quad \overline{h_2(0)} = c\overline{h_1(0)}, \\ [\overline{h_2}, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) = c[\overline{h_1}, \theta(\cdot, \lambda)](\infty), \quad [\overline{h_2}, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) = c[\overline{h_1}, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty),$$

即

$$(\overline{h_2} - c\overline{h_1})(0) = 0, \quad (\overline{h_2} - c\overline{h_1})'(0) = 0, \\ [\overline{h_2} - c\overline{h_1}, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) = 0, \quad [\overline{h_2} - c\overline{h_1}, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) = 0.$$

对任意的 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$, 因为

$$[\overline{h_2} - c\overline{h_1}, f](\infty) = \begin{vmatrix} [\overline{h_2} - c\overline{h_1}, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) & [\overline{h_2} - c\overline{h_1}, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) \\ [\overline{f}, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) & [\overline{f}, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) \end{vmatrix} = 0,$$

从而

$$\langle \overline{h_2} - c\overline{h_1}, f \rangle = [\overline{h_2} - c\overline{h_1}, f]_0^\infty = 0,$$

所以

$$\overline{h_2} - c\overline{h_1} \in \mathcal{D}(T_0(M)).$$

与 h_1, h_2 模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关矛盾!

\Leftarrow 由引理 3.6.3, 在 $\mathcal{D}(T_1(M))$ 中存在 h_1, h_2 , 使得

$$h_i(0) = \frac{\overline{l_{i2}}}{p(0)}, \quad h'_i(0) = -\frac{\overline{l_{i1}}}{p(0)}, \\ [h_i, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) = -\overline{n_{i2}}, \quad [h_i, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) = \overline{n_{i1}},$$

那么

$$f \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \langle f, h_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2,$$

由条件 (2)

$$\langle h_i, h_j \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

h_1, h_2 模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关. 否则, 不妨设

$$h_1 + \beta h_2 \in \mathcal{D}(T_0(M)),$$

则

$$h_1(0) + \beta h_2(0) = 0, \quad h'_1(0) + \beta h'_2(0) = 0,$$

所以

$$[h_1 + \beta h_2, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) = 0, \quad [h_1 + \beta h_2, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) = 0,$$

即

$$\begin{aligned}\frac{\overline{l_{12}}}{p(0)} &= -\beta \frac{\overline{l_{22}}}{p(0)}, & -\frac{\overline{l_{11}}}{p(0)} &= \beta \frac{\overline{l_{21}}}{p(0)}, \\ -\overline{n_{12}} &= \beta \overline{n_{22}}, & \overline{n_{11}} &= -\beta \overline{n_{21}},\end{aligned}$$

$$(l_{11}, l_{12}, n_{11}, n_{12}) = -\overline{\beta} (l_{21}, l_{22}, n_{21}, n_{22}),$$

与 $\text{rank}(L - N) = 2$ 矛盾!

推论 3.6.2 Weyl-Titchmarsh 自伴延拓 T 是特例.

证明 设

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \sin \alpha f(0) - \cos \alpha p(0) f'(0) = 0, [f, \psi](\infty) = 0\},$$

$$\psi(x, \mu) = \varphi(x, \mu) + M(\mu, \widehat{m}_\infty(\lambda_0)) \theta(x, \mu), \quad \text{Im} \lambda_0 \neq 0, \quad \text{Im} \mu \neq 0.$$

由于

$$[f, \psi](x) = \begin{vmatrix} [f, \varphi(\cdot, \lambda)](x) & [f, \theta(\cdot, \lambda)](x) \\ [\overline{\psi}, \varphi(\cdot, \lambda)](x) & [\overline{\psi}, \theta(\cdot, \lambda)](x) \end{vmatrix},$$

令

$$L = \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha p(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [\overline{\psi}(\cdot, \mu), \theta(\cdot, \lambda)](\infty) & -[\overline{\psi}(\cdot, \mu), \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) \end{pmatrix},$$

(1) $[\psi(\cdot, \overline{\mu}), \varphi(\cdot, \lambda)](\infty), [\psi(\cdot, \overline{\mu}), \theta(\cdot, \lambda)](\infty)$ 不同时为零, 所以 $\text{rank}(L - N) = 2$. 否则由前面的行列式可得

$$[f, \psi(\cdot, \mu)](\infty) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}(T_1(M)).$$

设 $\{\lambda_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ 是 T 的特征值, 取 $v \neq \lambda_n, n = 1, 2, \dots$ 且 $\text{Im} v = 0$. 以 f 记 Cauchy 问题

$$\begin{cases} My = vy, \\ y(0) = \cos \alpha, \\ p(0)y'(0) = \sin \alpha \end{cases}$$

的解, 则由于 M 是极限圆的, 所以 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$. 可是 v 不是特征值, 故

$$[f, \psi(\cdot, \mu)](\infty) \neq 0,$$

矛盾!

$$(2) \text{ 显然 } \begin{vmatrix} l_{i1} & \overline{l_{j1}} \\ l_{i2} & \overline{l_{j2}} \end{vmatrix} = p(0) \begin{vmatrix} n_{i1} & \overline{n_{j1}} \\ n_{i2} & \overline{n_{j2}} \end{vmatrix}, \quad i, j = 1, 2.$$

3.7 谱函数的存在性

为了得到奇型 Sturm-Liouville 微分算子的特征展开, 考虑它限制在有穷区间 $[0, b]$ 上的特征展开, 然后让区间 $[0, b] \rightarrow [0, \infty)$, 希望能由此得到 $[0, \infty)$ 上的展开.

$$M = -DpD + q, \quad x \in [0, \infty),$$

$$M_b = M|_{[0, b]}.$$

设 T_b 是 $T_0(M_b)$ 的自伴延拓,

$$\mathcal{D}(T_b) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_1(M_b)) \left| \begin{array}{l} \sin \alpha f(0) - \cos \alpha p(0) f'(0) = 0, \\ \cos \beta f(b) + \sin \beta p(b) f'(b) = 0 \end{array} \right. \right\},$$

设 $\varphi(x, \lambda)$ 和 $\theta(x, \lambda)$ 分别是 $My = \lambda y$ 满足初始条件

$$\begin{cases} \varphi(0, \lambda) = \sin \alpha, \\ p(0)\varphi'(0, \lambda) = -\cos \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta(0, \lambda) = \cos \alpha, \\ p(0)\theta'(0, \lambda) = \sin \alpha \end{cases}$$

的解. Weyl 解 $\psi_b(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + m_b(\lambda)\theta(x, \lambda)$ 满足边界条件

$$\sin \alpha \psi_b(0, \lambda) - \cos \alpha p(0) \psi_b'(0, \lambda) = 1,$$

$$\cos \beta \psi_b(b, \lambda) + \sin \beta p(b) \psi_b'(b, \lambda) = 0.$$

设 $\{\lambda_{bn}\}$ 是 T_b 的特征值, $|\lambda_{b1}| < |\lambda_{b2}| < \cdots \rightarrow \infty$, $\{\theta_{bn}\}$ 是对应的规范化特征函数, 因为任何与 θ 线性无关的解都不可能满足 $\mathcal{D}(T_b)$ 里 0 点的边界条件, 故

$$\theta_{bn}(x) = r_{bn}\theta(x, \lambda_{bn}), \quad n = 1, 2, \dots$$

由于 $\theta(x, \bar{\lambda}) = \overline{\theta(x, \lambda)}$, 所以 $\theta_{bn}(x)$ 是实的.

注 θ_{bn} 满足点 b 的边界条件, 所以

$$\cos \beta \theta(b, \lambda_{bn}) + \sin \beta p(b) \theta'(b, \lambda_{bn}) = 0,$$

即 λ_{bn} 是整函数 $\omega(\lambda) = \cos \beta \theta(b, \lambda) + \sin \beta p(b) \theta'(b, \lambda)$ 的零点或 Weyl 函数 $m_b(\lambda)$ 的极点.

特征展开: 对任意的 $f \in L^2[0, b]$, 有

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, r_{bn}\theta(\cdot, \lambda_{bn})) r_{bn}\theta(\cdot, \lambda_{bn})$$

和 Parseval 等式

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, r_{bn}\theta(\cdot, \lambda_{bn}))|^2.$$

将它们改写如下:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \theta(\cdot, \lambda_{bn})) \theta(\cdot, \lambda_{bn}) r_{bn}^2,$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \theta(\cdot, \lambda_{bn}))|^2 r_{bn}^2.$$

作非降函数 $\rho_b(\lambda)$, 使得它是满足下述条件的阶梯函数:

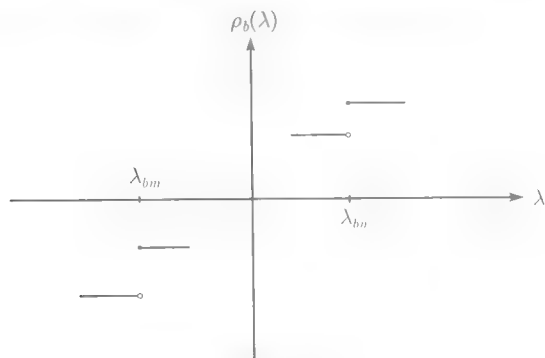


图 3.4

$$\begin{aligned} \rho_b(0) &= 0, \\ \rho_b(\lambda + 0) &= \rho_b(\lambda), \\ \rho_b(\lambda_{bn}) - \rho_b(\lambda_{bn} - 0) &= r_{bn}^2. \end{aligned}$$

令

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^b f(x) \theta(x, \lambda) dx,$$

则

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(\lambda_{bn}) \theta(\cdot, \lambda_{bn}) r_{bn}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) \theta(\cdot, \lambda) d\rho_b(\lambda),$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(\lambda_{bn})|^2 r_{bn}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\rho_b(\lambda).$$

称 $\hat{f}(\lambda)$ 为 $f(x)$ 的广义 Fourier 变换. 引进空间

$$L_{\rho_b}^2(-\infty, +\infty) = \left\{ g \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d\rho_b(\lambda) < \infty \right\},$$

则上面的结果表明

$$f \in L^2[0, b] \xrightarrow{U} \widehat{f} = \int_0^b f(x) \theta(x, \cdot) dx \in L_{\rho_b}^2(-\infty, +\infty)$$

是一个等距线性算子.

把 Parseval 等式写成积分形式, 称 $\rho_b(\lambda)$ 为 T_b 的谱函数, 它与 Weyl 函数 $m_b(\lambda)$ 有下述关系:

引理 3.7.1 (Levinson) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_b(\lambda)}{|\mu - \lambda|^2} = \frac{\operatorname{Im} m_b(\mu)}{\operatorname{Im} \mu}, \operatorname{Im} \mu \neq 0.$

证明 因为 Weyl 解 $\psi_b(x, \mu) = \varphi(x, \mu) + m_b(\mu)\theta(x, \mu)$ ($m_b(\mu) \in C_b(\mu)$) 满足

$$\int_0^b |\psi_b(x, \mu)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} m_b(\mu)}{\operatorname{Im} \mu}, \quad \operatorname{Im} \mu \neq 0,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}_b(\lambda, \mu)|^2 d\rho_b(\lambda) = \frac{\operatorname{Im} m_b(\mu)}{\operatorname{Im} \mu}, \quad \operatorname{Im} \mu \neq 0,$$

其中,

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_b(\lambda, \mu) &= \int_0^b \psi_b(x, \mu) \theta(x, \lambda) dx = \int_0^b \psi_b(x, \mu) \overline{\theta(x, \lambda)} dx \quad (\lambda \text{ 是实的!}) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} \int_0^b (\overline{\theta(x, \lambda)} M \psi_b(x, \mu) - \psi_b(x, \mu) \overline{M \theta(x, \lambda)}) dx \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} [\psi_b(\cdot, \mu), \theta(\cdot, \lambda)]_0^b. \end{aligned}$$

特别地, 由于 $\psi_b(x, \mu)$ 和 $\theta(x, \lambda_{bn})$ 在点 b 满足同一个边界条件, 故

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_b(\lambda_{bn}, \mu) &= \frac{1}{\mu - \lambda_{bn}} [\psi_b(\cdot, \mu), \theta(\cdot, \lambda_{bn})]_0^b \\ &= -\frac{1}{\mu - \lambda_{bn}} [\psi_b(\cdot, \mu), \theta(\cdot, \lambda_{bn})](0) \\ &= -\frac{1}{\mu - \lambda_{bn}} \begin{vmatrix} \sin \alpha + m_b(\mu) \cos \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha + m_b(\mu) \sin \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{\mu - \lambda_{bn}}, \end{aligned}$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}_b(\lambda, \mu)|^2 d\rho_b(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} r_{bn}^2 \left| \frac{1}{\mu - \lambda_{bn}} \right|^2,$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho_b(\lambda)}{|\mu - \lambda|^2} = \frac{\operatorname{Im} m_b(\mu)}{\operatorname{Im} \mu}, \operatorname{Im} \mu \neq 0.$

定理 3.7.1 (Helly 选择定理) 设 (1) $\{h_n\}$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上实的非降函数所组成的序列;

(2) H 是 $(-\infty, \infty)$ 上的非负函数;

(3) $|h_n(x)| \leq H(x)$, $n = 1, 2, \dots$, $-\infty < x < \infty$;

则存在子序列 $\{h_{n_k}\}$ 和非降函数 \tilde{h} , 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_{n_k}(x) = \tilde{h}(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$|\tilde{h}(x)| \leq H(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

证明 (1) 由 Bolzano-Weierstrass 定理和 Cantor 对角线方法可以选出 $\{h_n\}$ 的一个子列, 使得该子列在一切有理点均收敛. 不妨假定这个子列就是 $\{h_n\}$ 本身. 令

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

为有理点集, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x_j) = C_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

因为 $x_j < x_l$,

$$h_n(x_j) \leq h_n(x_l), \quad n = 1, 2, \dots,$$

所以

$$C_j \leq C_l.$$

(2) 令 $h(x) = \inf_{x_j \geq x} C_j$, 当 $x' \leq x''$ 时, 因为

$$\{C_j \mid x_j > x'\} \supset \{C_j \mid x_j > x''\},$$

所以 $h(x') \leq h(x'')$, h 非降.

(3) $h(x+0) = h(x)$, 右连续

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_{j0} > x$, 使得

$$h(x) > C_{j0} - \varepsilon.$$

这样当 $x < x' < x_{j0}$ 时, 有

$$h(x) > C_{j0} - \varepsilon \geq h(x') - \varepsilon,$$

即

$$h(x') - h(x) < \varepsilon, \quad x < x' < x_{j0},$$

所以

$$\lim_{x' \rightarrow x+0} h(x') = h(x).$$

(4) 如果 x 是 $h(x)$ 的连续点, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x)$.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 由连续性, 存在有理点 x_j 和 x_l , 使得 $x_j < x < x_l$, 而

$$h(x_l) - h(x_j) < \frac{\varepsilon}{2},$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x_j) = h(x_j)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x_l) = h(x_l)$, 存在 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时,

$$|h_n(x_j) - h(x_j)| < \varepsilon/2, \quad |h_n(x_l) - h(x_l)| < \varepsilon/2.$$

于是

$$\begin{aligned} h(x) - \varepsilon &\leq h(x_l) - \varepsilon < h(x_j) - \varepsilon/2 < h_n(x_j) \\ &\leq h_n(x_l) < h(x_l) + \varepsilon/2 < h(x_j) + \varepsilon \leq h(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

这样当 $n \geq n_0$ 时, 便有

$$h(x) - \varepsilon < h_n(x_j) \leq h_n(x) \leq h_n(x_l) < h(x) + \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x).$$

所以使 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) \neq h(x)$ 的点至多可数, 设为 $\{x'_j | j \in J\}$, J 至多可数.

(5) 因为 $|h_n(x)| \leq H(x)$, 利用 (1), 可以选出 $\{h_n\}$ 的一个子列 $\{h_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_{n_k}(x'_j) \text{ 存在, } j \in J.$$

令

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x \neq x'_j, j \in J, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} h_{n_k}(x'_j), & x = x'_j, \end{cases}$$

则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_{n_k}(x) = \tilde{h}(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

$\tilde{h}(x)$ 当然是非降的且 $|\tilde{h}(x)| \leq H(x)$.

定理 3.7.2 (谱函数的存在性, B. M. Levitan, N. Levinson, 1949) 存在 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 和非降函数 $\rho(\lambda)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{b_n} = \rho(\lambda)$.

证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_b(\lambda)}{|\mu - \lambda|^2} = \frac{\text{Im} m_b(\mu)}{\text{Im} \mu}, \quad \text{Im} \mu \neq 0.$$

对 $\mu = i$, 由于 $b > 1$ 时, $C_b(i) \subset C_1(i)$ 及其内部, 故

$$m_b(i) \in C_b(i) \subset C_1(i) \text{ 及其内部,}$$

所以

$$|m_b(i)| < K, \quad b \geq 1,$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_b(\lambda)}{1+\lambda^2} \right| = |\operatorname{Im} m_b(i)| \leq |m_b(i)| < K, \quad b \geq 1,$$

对任意的 $\nu > 0$,

$$\int_0^{\nu} \frac{d\rho_b(\lambda)}{1+\lambda^2} \leq \int_0^{\nu} \frac{d\rho_b(\lambda)}{1+\lambda^2} < K,$$

$$\rho_b(\nu) - \rho_b(0) < K(1+\nu^2), \quad \rho_b(\nu) < K(1+\nu^2),$$

对 $\nu < 0$,

$$\int_{\nu}^0 \frac{d\rho_b(\lambda)}{1+\lambda^2} \leq \int_{\nu}^0 \frac{d\rho_b(\lambda)}{1+\lambda^2} < K,$$

$$\rho_b(0) - \rho_b(\nu) < K(1+\nu^2), \quad |\rho_b(\nu)| < K(1+\nu^2),$$

所以

$$|\rho_b(\lambda)| < K(1+\lambda^2), \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

由 Helly 选择定理, 存在子列 $\{b_n\}$ 和非降函数 $\rho(\lambda)$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{b_n}(\lambda) = \rho(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

定理 3.7.3 (Helly 积分定理, 有限区间) 设 (1) $\{\rho_n(\sigma)\}$ 是 $[a, b]$ 上的单调函数序列,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(\sigma) = \rho(\sigma);$$

(2) $\varphi \in C[a, b]$;

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(\sigma) d\rho_n(\sigma) = \int_a^b \varphi(\sigma) d\rho(\sigma).$$

证明 因为 $\varphi(\sigma)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|\sigma' - \sigma''| < \delta$ 时 $|\varphi(\sigma') - \varphi(\sigma'')| < \varepsilon$. 作 $[a, b]$ 的分割 $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_m = b$, 使得 $|\sigma_k - \sigma_{k-1}| < \delta$, 任取 $\xi_k \in [\sigma_{k-1}, \sigma_k]$, 有

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b \varphi(\sigma) d\rho_n(\sigma) - \sum_{k=1}^m \varphi(\xi_k)(\rho_n(\sigma_k) - \rho_n(\sigma_{k-1})) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^m \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \varphi(\sigma) d\rho_n(\sigma) - \sum_{k=1}^m \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \varphi(\xi_k) d\rho_n(\sigma) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^m \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} |\varphi(\sigma) - \varphi(\xi_k)| d\rho_n(\sigma) \\
&\leq \varepsilon \int_a^b d\rho_n(\sigma) = \varepsilon(\rho_n(b) - \rho_n(a)) < 2M\varepsilon.
\end{aligned}$$

同样地

$$\left| \int_a^b \varphi(\sigma) d\rho(\sigma) - \sum_{k=1}^m \varphi(\xi_k)(\rho(\sigma_k) - \rho(\sigma_{k-1})) \right| < 2M\varepsilon.$$

可是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(\sigma_k) = \rho(\sigma_k), \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

所以可以取到 N , 使 $n \geq N$ 时,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=1}^m \varphi(\xi_k)(\rho_n(\sigma_k) - \rho_n(\sigma_{k-1})) - \sum_{k=1}^m \varphi(\xi_k)(\rho(\sigma_k) - \rho(\sigma_{k-1})) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^m |\varphi(\xi_k)| (|\rho_n(\sigma_k) - \rho(\sigma_k)| + |\rho_n(\sigma_{k-1}) - \rho(\sigma_{k-1})|) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

这样当 $n \geq N$ 时便有

$$\left| \int_a^b \varphi(\sigma) d\rho_n(\sigma) - \int_a^b \varphi(\sigma) d\rho(\sigma) \right| < (4M + 1)\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(\sigma) d\rho_n(\sigma) = \int_a^b \varphi(\sigma) d\rho(\sigma).$$

定理 3.7.4 (Helly 积分定理, 无穷区间) 设 (1) $\{\rho_n(\sigma)\}$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的单调函数所组成的序列且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(\sigma) = \rho(\sigma);$$

(2) $\varphi \in C(-\infty, \infty)$;

(3) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > 0$, 使得当 $a, b > A$ 时,

$$\int_{-\infty}^{-a} |\varphi(\sigma)| d\rho_n(\sigma), \quad \int_b^{\infty} |\varphi(\sigma)| d\rho_n(\sigma) < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots;$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma) d\rho_n(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma) d\rho(\sigma).$$

证明 (1) $\varphi \in L_\rho(-\infty, \infty)$, 因而 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma) d\rho(\sigma)$ 有意义.

设 $a, b > A$, 任取 $b' > b$, 则有

$$\int_b^{b'} |\varphi(\sigma)| d\rho_n(\sigma) < \varepsilon.$$

由有限区间的 Helly 积分定理, 有

$$\int_b^{b'} |\varphi(\sigma)| d\rho(\sigma) \leq \varepsilon.$$

因为 b' 任意, 所以

$$\int_b^{\infty} |\varphi(\sigma)| d\rho(\sigma) \leq \varepsilon.$$

同理,

$$\int_{-\infty}^{-a} |\varphi(\sigma)| d\rho(\sigma) \leq \varepsilon,$$

所以

$$\varphi \in L_\rho(-\infty, \infty).$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma) d\rho_n(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma) d\rho(\sigma).$$

当 $a, b > A$ 时,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-a} |\varphi(\sigma)| d\rho_n(\sigma) \leq \varepsilon, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_b^{\infty} |\varphi(\sigma)| d\rho_n(\sigma) \leq \varepsilon.$$

这样便得

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma) d\rho_n(\sigma) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma) d\rho(\sigma) \right| \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-a}^b \varphi(\sigma) d\rho_n(\sigma) - \int_{-a}^b \varphi(\sigma) d\rho(\sigma) \right| \\ & \quad + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{-a} |\varphi(\sigma)| d\rho_n(\sigma) + \int_b^{\infty} |\varphi(\sigma)| d\rho_n(\sigma) \right) \\ & \quad + \int_{-\infty}^{-a} |\varphi(\sigma)| d\rho(\sigma) + \int_b^{\infty} |\varphi(\sigma)| d\rho(\sigma) \leq 4\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma) d\rho_n(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma) d\rho(\sigma).$$

给出谱函数与 Weyl 函数的关系 Titchmarsh 公式.

定理 3.7.5 设 $M(\lambda)$ 是 Weyl 函数 (极限点或极限圆情形), ξ, η 是 ρ 的连续点, 则

$$\rho(\eta) - \rho(\xi) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\xi}^{\eta} \operatorname{Im} M(\varepsilon + i\delta) d\varepsilon.$$

而在极限点情形还有反演公式

$$M(\lambda) - M(\lambda_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma - \lambda} - \frac{1}{\sigma - \lambda_0} \right) d\rho(\sigma) + c(\lambda - \lambda_0), \quad \operatorname{Im} \lambda, \operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0.$$

证明 (1) 对于 ρ 的连续点 ξ, η ,

$$\rho(\eta) - \rho(\xi) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\xi}^{\eta} \operatorname{Im} M(\varepsilon + i\delta) d\varepsilon.$$

对于任意的 λ , 若 $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_b(\sigma)}{|\lambda - \sigma|^2} = \frac{\operatorname{Im} m_b(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda}.$$

当 $b \geq 1$ 时, $C_b(i) \subset C_1(i)$ 及其内部, 所以

$$|\operatorname{Im} m_b(i)| \leq |m_b(i)| \leq K, \quad b \geq 1.$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_b(\sigma)}{|i - \sigma|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_b(\sigma)}{1 + \sigma^2} = \operatorname{Im} m_b(i) \leq |m_b(i)| \leq K, \quad b \geq 1.$$

考虑 $\operatorname{Im} \lambda, \operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\sigma - \lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2} &= \frac{(\sigma - \lambda_0)(\sigma - \bar{\lambda}_0) - (\sigma - \lambda)(\sigma - \bar{\lambda})}{|\sigma - \lambda|^2 |\sigma - \lambda_0|^2} \\ &= \frac{-\lambda_0 \sigma - \bar{\lambda}_0 \sigma + |\lambda_0|^2 + \lambda \sigma + \bar{\lambda} \sigma - |\lambda|^2}{|\sigma - \lambda|^2 |\sigma - \lambda_0|^2} \\ &= \frac{\sigma(\lambda - \lambda_0) + \sigma(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) + |\lambda_0|^2 - |\lambda|^2}{|\sigma - \lambda|^2 |\sigma - \lambda_0|^2} \\ &= O\left(\frac{1}{|\sigma|^3}\right), \quad |\sigma| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

下面对任意的 $A > 0$ 和 $a, b > A$, 来估计 $\int_{-\infty}^{-a} \frac{d\rho_{b_n}(\sigma)}{|\sigma|^3}$ 和 $\int_b^{\infty} \frac{d\rho_{b_n}(\sigma)}{|\sigma|^3}$.

$$\int_b^{\infty} \frac{d\rho_{b_n}(\sigma)}{|\sigma|^3} = \int_b^{\infty} \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1 + \sigma^2}{\sigma^2} \cdot \frac{d\rho_{b_n}(\sigma)}{1 + \sigma^2} \leq \frac{2}{b} \int_b^{\infty} \frac{d\rho_{b_n}(\sigma)}{1 + \sigma^2} \leq \frac{2}{A} K, \quad b_n \geq 1,$$

$$\int_{-\infty}^{-a} \frac{d\rho_{b_n}(\sigma)}{|\sigma|^3} = \int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{|\sigma|} \cdot \frac{1+\sigma^2}{\sigma^2} \cdot \frac{d\rho_{b_n}(\sigma)}{1+\sigma^2} \leq \frac{2}{a} \int_{-\infty}^{-a} \frac{d\rho_{b_n}(\sigma)}{1+\sigma^2} \leq \frac{2}{A} K, \quad b_n \geq 1,$$

所以对任给的 $\varepsilon > 0$, 只要 A 充分大, 当 $a, b > A$ 时, 便有

$$\int_b^{\infty} \frac{d\rho_{b_n}(\sigma)}{|\sigma|^3}, \quad \int_{-\infty}^{-a} \frac{d\rho_{b_n}(\sigma)}{|\sigma|^3} < \varepsilon, \quad b_n \geq 1.$$

这样对任给的 $\varepsilon > 0$, 便存在 $A > 0$, 当 $a, b > A$ 时, 有

$$\int_b^{\infty} \left(\frac{1}{|\sigma - \lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2} \right) d\rho_{b_n}(\sigma), \quad \int_{-\infty}^{-a} \left(\frac{1}{|\sigma - \lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2} \right) d\rho_{b_n}(\sigma) < \varepsilon.$$

利用 Helly 积分定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\sigma - \lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2} \right) d\rho_{b_n}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\sigma - \lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2} \right) d\rho(\sigma).$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\sigma - \lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2} \right) d\rho_{b_n}(\sigma) = \frac{\operatorname{Im} m_{b_n}(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} - \frac{\operatorname{Im} m_{b_n}(\lambda_0)}{\operatorname{Im} \lambda_0},$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 右边的极限是

$$\frac{\operatorname{Im} M(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} - \frac{\operatorname{Im} M(\lambda_0)}{\operatorname{Im} \lambda_0},$$

所以把涉及 λ_0 的部分看成常数可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\sigma)}{|\sigma - \lambda|^2} + c = \frac{\operatorname{Im} M(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda}, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0, \quad c \text{ 是与 } \lambda \text{ 无关的常数.}$$

取 $\lambda = \varepsilon + i\delta$, 得



图 3.5

$$\operatorname{Im} M(\varepsilon + i\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta d\rho(\sigma)}{(\sigma - \varepsilon)^2 + \delta^2} + c\delta,$$

$$\int_{\xi}^{\eta} \operatorname{Im} M(\varepsilon + i\delta) d\varepsilon = \delta \int_{\xi}^{\eta} d\varepsilon \left(\int_{-\infty}^{\xi-1} + \int_{\xi-1}^{\eta+1} + \int_{\eta+1}^{\infty} \right) \frac{d\rho(\sigma)}{(\sigma - \varepsilon)^2 + \delta^2} + c\delta(\eta - \xi),$$

$$\int_{-\infty}^{\xi-1} \frac{d\rho(\sigma)}{(\sigma - \varepsilon)^2 + \delta^2} \leq \int_{-\infty}^{\xi-1} \frac{d\rho(\sigma)}{(\sigma - \varepsilon)^2}.$$

因为

$$\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sigma^2}{(\sigma - \varepsilon)^2} = 1,$$

所以, 由 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\sigma)}{1 + \sigma^2}$ 存在知

$$\int_{-\infty}^{\xi-1} \frac{d\rho(\sigma)}{(\sigma - \varepsilon)^2} = O(1).$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\xi-1} \frac{d\rho(\sigma)}{(\sigma - \varepsilon)^2 + \delta^2} = O(1).$$

同理

$$\int_{\eta+1}^{\infty} \frac{d\rho(\sigma)}{(\sigma - \varepsilon)^2 + \delta^2} = O(1).$$

这样便只需要考虑

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \delta \int_{\xi}^{\eta} d\varepsilon \int_{\xi-1}^{\eta+1} \frac{d\rho(\sigma)}{(\sigma - \varepsilon)^2 + \delta^2}.$$

$\frac{\delta}{(\sigma - \varepsilon)^2 + \delta^2}$ 是正函数, 而

$$\int_{\xi-1}^{\eta+1} d\rho(\sigma) \int_{\xi}^{\eta} \frac{\delta d\varepsilon}{(\sigma - \varepsilon)^2 + \delta^2} = \int_{\xi-1}^{\eta+1} \arctan \frac{\varepsilon - \sigma}{\delta} \bigg|_{\xi}^{\eta} d\rho(\sigma) \text{ 存在,}$$

故由 Fubini 定理, 积分号可以交换,

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\xi}^{\eta} d\varepsilon \int_{\xi-1}^{\eta+1} \frac{\delta d\rho(\sigma)}{(\sigma - \varepsilon)^2 + \delta^2} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\xi-1}^{\eta+1} \left(\arctan \frac{\eta - \sigma}{\delta} - \arctan \frac{\xi - \sigma}{\delta} \right) d\rho(\sigma). \quad (3.1)$$

可是

$$\left| \arctan \frac{\eta - \sigma}{\delta} - \arctan \frac{\xi - \sigma}{\delta} \right| \leq \pi,$$

而 $\pi \in L_{\rho}[\xi - 1, \eta + 1]$, 这样由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\begin{aligned} (3.1) &= \int_{\xi-1}^{\eta+1} \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\arctan \frac{\eta - \sigma}{\delta} - \arctan \frac{\xi - \sigma}{\delta} \right) d\rho(\sigma) \\ &= \int_{\xi-1}^{\eta+1} \begin{cases} 0, & \xi - 1 \leq \sigma < \xi, \eta < \sigma \leq \eta + 1, \\ \frac{\pi}{2}, & \sigma = \xi, \eta, \\ \pi, & \xi < \sigma < \eta \end{cases} d\rho(\sigma) \\ &= \frac{\pi}{2} (\rho(\xi) - \rho(\xi - 0) + \rho(\eta) - \rho(\eta - 0)) + \pi (\rho(\eta - 0) - \rho(\xi + 0)), \end{aligned}$$

当 ξ, η 是 ρ 的连续点时,

$$\text{上式} = \pi(\rho(\eta) - \rho(\xi)).$$

(2) 在极限点情形.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\sigma)}{|\sigma - \lambda|^2} + c = \frac{\operatorname{Im} M(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda}, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0,$$

因为

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\sigma - \lambda} - \frac{1}{\sigma - \lambda_0} \right) &= \frac{\operatorname{Im} \lambda}{|\sigma - \lambda|^2} - \frac{\operatorname{Im} \lambda_0}{|\sigma - \lambda_0|^2} \\ &= \frac{\operatorname{Im} \lambda}{|\sigma - \lambda|^2} - \frac{\operatorname{Im} \lambda}{|\sigma - \lambda_0|^2} + \frac{\operatorname{Im} \lambda}{|\sigma - \lambda_0|^2} - \frac{\operatorname{Im} \lambda_0}{|\sigma - \lambda_0|^2} \\ &= \operatorname{Im} \lambda \left(\frac{1}{|\sigma - \lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2} \right) + \operatorname{Im} (\lambda - \lambda_0) \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2}, \end{aligned}$$

从而

$$\operatorname{Im} \lambda \left(\frac{1}{|\sigma - \lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\sigma - \lambda} - \frac{1}{\sigma - \lambda_0} \right) - \operatorname{Im} (\lambda - \lambda_0) \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2}. \quad (3.2)$$

又由

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\sigma - \lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2} \right) d\rho(\sigma) = \frac{\operatorname{Im} M(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} - \frac{\operatorname{Im} M(\lambda_0)}{\operatorname{Im} \lambda_0}$$

得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \lambda \left(\frac{1}{|\sigma - \lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2} \right) d\rho(\sigma) = \operatorname{Im} M(\lambda) - \operatorname{Im} \lambda \frac{\operatorname{Im} M(\lambda_0)}{\operatorname{Im} \lambda_0},$$

把 (3.2) 代入上式得

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\sigma - \lambda} - \frac{1}{\sigma - \lambda_0} \right) d\rho(\sigma) - \operatorname{Im} (\lambda - \lambda_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\sigma - \lambda_0|^2} d\rho(\sigma) \\ &= \operatorname{Im} M(\lambda) - \operatorname{Im} M(\lambda_0) + \left(1 - \frac{\operatorname{Im} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda_0} \right) \operatorname{Im} M(\lambda_0) \\ &= \operatorname{Im} (M(\lambda) - M(\lambda_0)) - \operatorname{Im} (\lambda - \lambda_0) \frac{\operatorname{Im} M(\lambda_0)}{\operatorname{Im} \lambda_0}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} (M(\lambda) - M(\lambda_0)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\sigma - \lambda} - \frac{1}{\sigma - \lambda_0} \right) d\rho(\sigma) - c \operatorname{Im} (\lambda - \lambda_0) \\ &= \operatorname{Im} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma - \lambda} - \frac{1}{\sigma - \lambda_0} \right) d\rho(\sigma) - c(\lambda - \lambda_0) \right], \end{aligned}$$

故

$$M(\lambda) - M(\lambda_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma - \lambda} - \frac{1}{\sigma - \lambda_0} \right) d\rho(\sigma) - c(\lambda - \lambda_0) + c',$$

令 $\lambda = \lambda_0$ 得 $c' = 0$, 所以

$$M(\lambda) - M(\lambda_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma - \lambda} - \frac{1}{\sigma - \lambda_0} \right) d\rho(\sigma) - c(\lambda - \lambda_0).$$

当 M 是极限点时, Weyl 函数唯一. 如果用

$$\rho(0) = 0, \quad \rho(\lambda + 0) = \rho(\lambda)$$

(Lebesgue-Stieltjes 测度与具体值无关, 只与 $\rho(\lambda + 0) - \rho(\lambda - 0)$ 有关!) 来规范谱函数, 则由 Titchmarsh 公式, 谱函数是唯一的, Weyl 函数则可以用谱函数反演出来.

定理 3.7.6 (1) 若 $M(\lambda)$ 在 $\{\lambda = \sigma + i\tau \mid a \leq \sigma \leq b, 0 \leq \tau \leq \delta\}$ 上连续, 则

$$\rho'(\sigma) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} M(\sigma), \quad \sigma \in [a, b].$$



图 3.6

(2) 若 $M(\lambda)$ 在 $\{\lambda = \sigma + i\tau \mid a \leq \sigma \leq b, -\delta < \tau < \delta\}$ 上连续, 则

$$\rho(\sigma) = \text{const}, \quad \sigma \in [a, b].$$



图 3.7

(3) 若 $M(\lambda)$ 在 $\{\lambda = \sigma + i\tau \mid a < \sigma < b, -\delta < \tau < \delta\}$ 上半纯, 则 $M(\lambda)$ 的每一个极点 λ_0 都是 ρ 的间断点,

$$\rho(\lambda_0 + 0) - \rho(\lambda_0 - 0) = -\operatorname{Res}_{\lambda_0} M,$$

且在 M 相邻的两个极点之间 $\rho = \text{const}$ (这就表示 ρ 的间断点都是 M 的极点!).

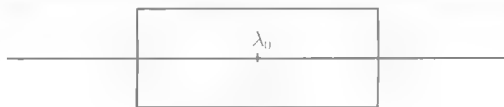


图 3.8

证明 (1) 取 $\xi \in (a, b)$ 是 ρ 的连续点, 则对任何 $\sigma \in [a, b]$, $\frac{1}{\pi} \int_{\xi}^{\sigma} \operatorname{Im} M(\varepsilon + i\tau) d\varepsilon$ 在 $[0, \delta]$ 上连续, 所以

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\xi}^{\sigma} \operatorname{Im} M(\varepsilon + i\tau) d\varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_{\xi}^{\sigma} \operatorname{Im} M(\varepsilon) d\varepsilon.$$

于是 ρ 在 $[a, b]$ 上连续且

$$\rho(\sigma) = \rho(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{\xi}^{\sigma} \operatorname{Im} M(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \rho'(\sigma) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} M(\sigma).$$

(2) 因为 $\overline{M(\sigma + i\tau)} = M(\sigma - i\tau)$,

$$M(\sigma) = \lim_{\tau \rightarrow +0} M(\sigma \pm i\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +0} M(\sigma + i\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \overline{M(\sigma + i\tau)},$$

所以 $M(\sigma)$ 是实的. 在 $[a, b]$ 上 ρ 的连续点 σ 处,

$$\rho(\sigma) = \rho(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{\xi}^{\sigma} \operatorname{Im} M(\varepsilon) d\varepsilon,$$

这个等式几乎处处成立, 所以点点成立. 于是由 (1),

$$\rho'(\sigma) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} M(\sigma) = 0, \quad \sigma \in [a, b],$$

$$\rho(\sigma) = \text{const}, \quad \sigma \in [a, b].$$

(3) 取一个含 λ_0 的闭路 Γ 如图 3.9 所示, Γ 内只含 $M(\lambda)$ 的一个极点 λ_0 , ξ, η 是 ρ 的连续点.

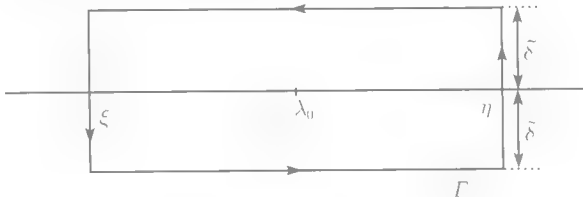


图 3.9

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\lambda_0} M &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} M(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\xi}^{\eta} (M(t - i\tilde{\delta}) - M(t + i\tilde{\delta})) dt + \int_{-\tilde{\delta}}^{\tilde{\delta}} (M(\eta + is) - M(\xi + is)) ds \right]. \end{aligned}$$

由于残数与 $\tilde{\delta}$ 无关, 让 $\tilde{\delta} \rightarrow +0$ 得

$$\operatorname{Res}_{\lambda_0} M = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi}^{\eta} (\overline{M(t + i\tilde{\delta})} - M(t + i\tilde{\delta})) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi}^{\eta} (-2i \operatorname{Im} M(t + i\delta)) dt \\
&= -(\rho(\eta) - \rho(\xi)).
\end{aligned}$$

所以

$$\rho(\lambda_0 + 0) - \rho(\lambda_0 - 0) = -\operatorname{Res}_{\lambda_0} M.$$

在 M 的相邻的两个极点之间, 由 (2), $\rho = \text{const.}$

3.8 极限点情形的特征展开

由 3.7 节, 谱函数 ρ 存在.

定理 3.8.1 若 $f \in L^2[0, \infty)$, 则存在 $\hat{f} \in L^2_{\rho}(-\infty, \infty)$, 使得

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(\lambda) - \int_0^A f(x) \theta(x, \lambda) dx \right|^2 d\rho(\lambda) = 0,$$

即 (在 $L^2_{\rho}(-\infty, \infty)$ 意义下)

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \theta(x, \lambda) dx$$

(称 \hat{f} 为 f 的广义 Fourier 变换) 且有

$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|_{\rho}^2.$$

(即 Parseval 等式 $\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda)$).

证明 (1) 设 $f \in C_0^{\infty}(0, \infty)$, 这时积分 $\hat{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \theta(x, \lambda) dx$ 按通常的意义存在并且是 λ 的连续函数. 对 Mf 在 $[0, b]$ 上用 Parseval 等式得

$$\int_0^b |Mf(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^b Mf(x) \theta(x, \lambda) dx \right|^2 d\rho_b(\lambda).$$

在 b 充分大时,

$$\int_0^{\infty} |Mf(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} Mf(x) \theta(x, \lambda) dx \right|^2 d\rho_b(\lambda).$$

由 Green 公式,

$$\int_0^{\infty} Mf(x) \overline{\theta(x, \lambda)} dx - \int_0^{\infty} f(x) \overline{M\theta(x, \lambda)} dx = [f, \theta(\cdot, \lambda)]_0^{\infty} = 0,$$

故

$$\int_0^\infty Mf(x)\theta(x, \lambda)dx = \int_0^\infty f(x)M\theta(x, \lambda)dx = \lambda \int_0^\infty f(x)\theta(x, \lambda)dx = \lambda \widehat{f}(\lambda),$$

于是 b 充分大时,

$$\int_0^\infty |Mf(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty \lambda^2 |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho_b(\lambda).$$

对充分大的 $\mu > 0$, 记 $\Delta = (-\infty, \infty) \setminus (-\mu, \mu)$, 有

$$\begin{aligned} \mu^2 \int_\Delta |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho_b(\lambda) &\leq \int_\Delta \lambda^2 |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho_b(\lambda) \leq \int_{-\infty}^\infty \lambda^2 |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho_b(\lambda) \\ &= \int_0^\infty |Mf(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

所以

$$\int_\Delta |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho_b(\lambda) \leq \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty |Mf(x)|^2 dx.$$

这个不等式对充分大的 b 一致成立. 另外, 在充分大的有限区间 $[0, b]$ 上对 f 用 Parseval 等式又有

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho_b(\lambda) = \left(\int_{-\mu}^\mu + \int_\Delta \right) |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho_b(\lambda),$$

所以

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\infty |f(x)|^2 dx - \int_{-\mu}^\mu |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right| \\ &\leq \left| \int_{-\mu}^\mu |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho_b(\lambda) - \int_{-\mu}^\mu |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right| + \left| \int_\Delta |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho_b(\lambda) \right|. \end{aligned}$$

先取定 μ 充分大, 使得

$$\left| \int_\Delta |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho_b(\lambda) \right| \leq \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty |Mf(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

再取一串 $\{b_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{b_n}(\lambda) = \rho(\lambda)$, 在 $[-\mu, \mu]$ 上用 Helly 积分定理, 当 n 充分大时, 有

$$\left| \int_{-\mu}^\mu |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho_{b_n}(\lambda) - \int_{-\mu}^\mu |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

所以

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda).$$

同时也就证明了 $\widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$!

(2) 设 $f \in L^2[0, \infty)$, 在 ∞ 的某邻域内为 0.

这时积分 $g(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\theta(x, \lambda)dx$ 按通常的意义也存在, 并且是 λ 的连续函数. 存在 $f_n \in C_0^\infty(0, \infty)$, 使得 $\|f_n - f\| \rightarrow 0$. 令

$$\widehat{f}_n(\lambda) = \int_0^\infty f_n(x)\theta(x, \lambda)dx,$$

则由 (1) 可知 $\widehat{f}_n \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 由

$$\|\widehat{f}_m - \widehat{f}_n\|_\rho^2 = \|f_m - f_n\|^2$$

知 $\{\widehat{f}_n\}$ 是 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 的基本列, 所以极限 \widehat{f} 存在且

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_\rho^2 &= \int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}_n(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty |f_n(x)|^2 dx = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \|f\|^2. \end{aligned}$$

剩下来要证明 $\widehat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\theta(x, \lambda)dx$ 按 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 意义成立.

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\theta(x, \lambda)dx,$$

当 A 充分大时, 考虑

$$g(\lambda) - \widehat{f}_n(\lambda) = \int_0^\infty (f(x) - f_n(x))\theta(x, \lambda)dx = \int_0^A (f(x) - f_n(x))\theta(x, \lambda)dx,$$

由 Schwarz 不等式,

$$|g(\lambda) - \widehat{f}_n(\lambda)| \leq \int_0^A |f(x) - f_n(x)| |\theta(x, \lambda)| dx \leq \|f - f_n\| \|\theta(\cdot, \lambda)\|_A,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n(\lambda) = g(\lambda), \quad \lambda \in (-\infty, \infty), \text{ 点点成立,}$$

而 $\{\widehat{f}_n\}$ 平均收敛到 \widehat{f} , 所以由 Riesz 定理, 存在 $\{\widehat{f}_{n_k}\}$ 子列几乎处处收敛到 $\widehat{f}(\lambda)$, 因此

$$\widehat{f}(\lambda) = g(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\theta(x, \lambda)dx.$$

(3) $f \in L^2[0, \infty)$.

令

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & x > a, \end{cases}$$

$\hat{f}_a(\lambda) = \int_0^a f(x)\theta(x, \lambda)dx$ 是 λ 的连续函数, 由 (2) 可知 $\hat{f}_a \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$. 显然

$$\|\hat{f}_a - \hat{f}_c\|_\rho^2 = \|f_a - f_c\|^2 = \int_a^c |f(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad c > a \rightarrow \infty,$$

所以 $\{\hat{f}_a\}$ 是 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 的基本列, 存在极限 $\hat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 由

$$\|\hat{f}_a\|_\rho^2 = \int_0^a |f(x)|^2 dx$$

可得

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_\rho^2 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \|\hat{f}_a\|_\rho^2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a |f(x)|^2 dx = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \|f\|^2, \\ \hat{f} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \hat{f}_a, \end{aligned}$$

即

$$\hat{f} = \int_0^\infty f(x)\theta(x, \cdot)dx$$

或

$$\int_{-\infty}^\infty \left| \hat{f}(\lambda) - \int_0^a f(x)\theta(x, \lambda)dx \right|^2 d\rho(\lambda) \rightarrow 0, \quad a \rightarrow \infty.$$

定理 3.8.2 (特征展开定理) 若 $f \in L^2[0, \infty)$, 则

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow -\infty, \\ \nu \rightarrow +\infty}} \int_0^\infty \left| f(x) - \int_\mu^\nu \hat{f}(\lambda)\theta(x, \lambda)d\rho(\lambda) \right|^2 dx = 0,$$

即 (在 $L^2[0, \infty)$ 意义下)

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\lambda)\theta(x, \lambda)d\rho(\lambda).$$

证明 (1) 记 $\Delta = (\mu, \nu]$, $f_\Delta = \int_\Delta \hat{f}(\lambda)\theta(\cdot, \lambda)d\rho(\lambda) \in L^2[0, \infty)$.

由于 $\hat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, $\theta(x, \lambda)$ 是 λ 的连续函数, 所以积分 $\int_\mu^\nu \hat{f}(\lambda)\theta(x, \lambda)d\rho(\lambda)$

存在, 它是 x 的连续函数.

设 $P \in L^2[0, \infty)$, $\text{supp} P \subset [0, a]$, Q 是对应的广义 Fourier 变换, 则

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f_\Delta(x) \overline{P(x)} dx &= \int_0^a f_\Delta(x) \overline{P(x)} dx = \int_0^a \left(\int_\Delta \widehat{f}(\lambda) \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) \right) \overline{P(x)} dx \\
&\stackrel{\text{Fubini 定理}}{=} \int_\Delta \widehat{f}(\lambda) \left(\int_0^a \overline{P(x)} \theta(x, \lambda) dx \right) d\rho(\lambda) \\
&= \int_\Delta \widehat{f}(\lambda) \overline{Q(\lambda)} d\rho(\lambda) \\
&\leq \left(\int_\Delta |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Delta |Q(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_\Delta |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^\infty |Q(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Delta |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^\infty |P(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

取

$$P(x) = \begin{cases} f_\Delta(x), & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & x > a, \end{cases}$$

因为 $f_\Delta(x)$ 连续, $P \in L^2[0, \infty)$, 于是由前面的不等式得

$$\begin{aligned}
\int_0^a |f_\Delta(x)|^2 dx &\leq \left(\int_\Delta |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^\infty |P(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Delta |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^a |f_\Delta(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\
\left(\int_0^a |f_\Delta(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_\Delta |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

右边与 a 无关, 所以

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty |f_\Delta(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_\Delta |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
f_\Delta &\in L^2[0, \infty).
\end{aligned}$$

(2) 如果 $f_1, f_2 \in L^2[0, \infty)$, 对应的广义 Fourier 变换是 $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$, 则由

$$4f_1 \overline{f_2} = |f_1 + f_2|^2 - |f_1 - f_2|^2 + i|f_1 + if_2|^2 - i|f_1 - if_2|^2$$

可得广义的 Parseval 等式

$$\int_0^\infty f_1(x) \overline{f_2(x)} dx = \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}_1(\lambda) \overline{\widehat{f}_2(\lambda)} d\rho(\lambda).$$

(3) $f = \lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} f_{\Delta}$, 即 $f = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) \theta(\cdot, \lambda) d\rho(\lambda)$.

设 $P \in L^2[0, \infty)$, $\text{supp} P \subset [0, a]$, Q 是 P 的广义 Fourier 变换, 由广义的 Parseval 等式得

$$\int_0^{\infty} f(x) \overline{P(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) \overline{Q(\lambda)} d\rho(\lambda),$$

记 $\Delta^c = (-\infty, \infty) \setminus \Delta$, 由 (1),

$$\int_0^{\infty} f_{\Delta}(x) \overline{P(x)} dx = \int_{\Delta} \widehat{f}(\lambda) \overline{Q(\lambda)} d\rho(\lambda),$$

故

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (f(x) - f_{\Delta}(x)) \overline{P(x)} dx &= \int_{\Delta^c} \widehat{f}(\lambda) \overline{Q(\lambda)} d\rho(\lambda), \\ \left| \int_0^{\infty} (f(x) - f_{\Delta}(x)) \overline{P(x)} dx \right|^2 &= \left| \int_{\Delta^c} \widehat{f}(\lambda) \overline{Q(\lambda)} d\rho(\lambda) \right|^2 \\ &\leq \int_{\Delta^c} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \cdot \int_{\Delta^c} |Q(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \\ &\leq \int_{\Delta^c} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |Q(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \\ &= \int_{\Delta^c} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \cdot \int_0^{\infty} |P(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

因为 $f_{\Delta} \in L^2[0, \infty)$, 取

$$P(x) = \begin{cases} f(x) - f_{\Delta}(x), & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & x > a, \end{cases}$$

则 $P \in L^2[0, \infty)$, 代入可得

$$\int_0^a |f(x) - f_{\Delta}(x)|^2 dx \leq \int_{\Delta^c} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda),$$

右边与 a 无关, 故

$$\int_0^{\infty} |f(x) - f_{\Delta}(x)|^2 dx \leq \int_{\Delta^c} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda).$$

让 $\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)$ 即得

$$\int_0^{\infty} \left| f(x) - \int_{\mu}^{\nu} \widehat{f}(x) \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) \right|^2 dx \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow -\infty, \nu \rightarrow +\infty.$$

以上证明了

$$f \in L^2[0, \infty) \xrightarrow{U} \widehat{f} \in L^2_{\rho}(-\infty, \infty)$$

是一个等距线性算子, 而且 f 可以由 \widehat{f} 反演得出. 下面还要证明 U 是 $L^2[0, \infty) \rightarrow L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 的酉算子, 即 U 是满射.

定义 3.8.1 对任意的 $f \in L^2[0, \infty)$, 定义

$$Uf = \widehat{f},$$

则 U 是等距线性算子.

定义 3.8.2 对任意的 $g = \widehat{f} \in \text{ran} U$, 定义

$$\check{g} = \widetilde{U}g = f,$$

则 $\widetilde{U}U = \text{id}_{L^2[0, \infty)}$, $U\widetilde{U} = \text{id}_{\text{ran} U}$.

引理 3.8.1 设 $g \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 记 $\Delta = (\mu, \nu]$,

$$f_\Delta(x) = \int_\Delta g(\lambda)\theta(x, \lambda)d\rho(\lambda),$$

则 $f_\Delta \in L^2[0, \infty)$ 且存在 $f \in L^2[0, \infty)$, 使得

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow -\infty, \\ \nu \rightarrow +\infty}} \int_0^\infty |f(x) - f_\Delta(x)|^2 dx = 0,$$

即 (在 $L^2[0, \infty)$ 意义下)

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty g(\lambda)\theta(x, \lambda)d\rho(\lambda).$$

证明 $f_\Delta \in L^2[0, \infty)$ 的证明同前, 下面要证明 $\{f_\Delta\}$ 是 $L^2[0, \infty)$ 的基本列. 设 $\Delta_1 \supset \Delta_2$, $P \in L^2[0, \infty)$, 对充分大的 x , P 为 0, Q 是 P 的广义 Fourier 变换. 考虑

$$\int_0^\infty (f_{\Delta_1}(x) - f_{\Delta_2}(x))\overline{P(x)}dx = \int_0^\infty \left(\int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} g(\lambda)\theta(x, \lambda)d\rho(\lambda) \right) \overline{P(x)}dx,$$

由于积分实际是在有限区间上进行的, 因而可以交换积分次序, 所以

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} g(\lambda) \left(\int_0^\infty \overline{P(x)}\theta(x, \lambda)dx \right) d\rho(\lambda) \\ &= \int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} g(\lambda)\overline{Q(\lambda)}d\rho(\lambda), \end{aligned}$$

利用 Schwarz 不等式,

$$\text{上式} \leq \left(\int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} |g(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} |Q(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}$$

取

$$P(x) = \begin{cases} f_{\Delta_1}(x) - f_{\Delta_2}(x), & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & x > a \end{cases}$$

(因为 $f_{\Delta_1}, f_{\Delta_2}$ 是 x 的连续函数, 所以 $P \in L^2[0, \infty)$), 则有

$$\begin{aligned} \int_0^a |f_{\Delta_1}(x) - f_{\Delta_2}(x)|^2 dx &\leq \left(\int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} |g(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} |Q(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} |g(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^\infty |P(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

即

$$\int_0^a |f_{\Delta_1}(x) - f_{\Delta_2}(x)|^2 dx \leq \int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} |g(\lambda)|^2 d\rho(\lambda).$$

右边与 a 无关, 故

$$\int_0^\infty |f_{\Delta_1}(x) - f_{\Delta_2}(x)|^2 dx \leq \int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} |g(\lambda)|^2 d\rho(\lambda),$$

这表明 $\{f_\Delta\}$ 是 $L^2[0, \infty)$ 的基本列.

定理 3.8.3 设 $g \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 则存在 $f \in L^2[0, \infty)$, 使得

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow -\infty \\ \nu \rightarrow +\infty}} \int_0^\infty \left| f(x) - \int_\mu^\nu g(\lambda) \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) \right|^2 dx = 0$$

且

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty \left| g(\lambda) - \int_0^a f(x) \theta(x, \lambda) dx \right|^2 d\rho(\lambda) = 0,$$

即 (在 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 意义下)

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \theta(x, \lambda) dx = \widehat{f}(\lambda).$$

注 这表示对任意的 $g \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, $\exists f \in L^2[0, \infty)$, 使得

$$Uf = g,$$

即 U 是满射. 故 $U: L^2[0, \infty) \rightarrow L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 是酉算子, $\tilde{U} = U^{-1}$.

证明 由引理 3.8.1, 存在 $f \in L^2[0, \infty)$, 使得在 $L^2[0, \infty)$ 意义下,

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty g(\lambda) \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda).$$

而由定理 3.8.1 与定理 3.8.2, $\widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 且在 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 意义下,

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\theta(x, \lambda)dx.$$

同时在 $L^2[0, \infty)$ 意义下,

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\lambda)\theta(x, \lambda)d\rho(\lambda).$$

下面要证明的是 $g = \widehat{f}$, 即

$$\int_{-\infty}^\infty |g(\lambda) - \widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = 0.$$

记 $r = g - \widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 来证明它是 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 的零元素. 记 $\Delta = (\mu, \nu]$,

$$f_\Delta(x) = \int_\Delta g(\lambda)\theta(x, \lambda)d\rho(\lambda),$$

$$\widehat{f}_\Delta(x) = \int_\Delta \widehat{f}(\lambda)\theta(x, \lambda)d\rho(\lambda).$$

由定理 3.8.2,

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \widehat{f}_\Delta = f, \quad L^2[0, \infty) \text{ 意义下},$$

而引理 3.8.1 的结论是

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} f_\Delta = f, \quad L^2[0, \infty) \text{ 意义下}.$$

令 $h_\Delta = f_\Delta - \widehat{f}_\Delta$ (x 的连续函数), 则

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} h_\Delta = 0, \quad L^2[0, \infty) \text{ 意义下}.$$

而

$$h_\Delta(x) = \int_\Delta r(\lambda)\theta(x, \lambda)d\rho(\lambda).$$

那么怎样得到 $r = 0$ 呢? 这样想:

$$r = 0 \Rightarrow h_\Delta = 0 \Rightarrow \int_0^s h_\Delta(x)dx = \int_\Delta r(\lambda) \left(\int_0^s \theta(x, \lambda)dx \right) d\rho(\lambda) = 0,$$

即

$$\int_\Delta r(\lambda)\Gamma_s(\lambda)d\rho(\lambda) = 0,$$

其中, $\Gamma_s(\lambda) = \int_0^s \theta(x, \lambda) dx$. 如果 $\int_{-\infty}^{\infty} |r(\lambda) \Gamma_s(\lambda)| d\rho(\lambda) < \infty$ (这一点不成问题, 因为 $r \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 而 $\Gamma_s(\lambda) = \int_0^\infty \chi_{[0,s]}(x) \theta(x, \lambda) dx$ 也属于 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$), 则由 Lebesgue 控制收敛定理 (当 μ, ν 是 ρ 的连续点时), 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\arctan \frac{\nu - \lambda}{\varepsilon} - \arctan \frac{\mu - \lambda}{\varepsilon} \right) r(\lambda) \Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda) = 0,$$

即

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mu}^{\nu} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\sigma - \lambda)^2} d\sigma \right) r(\lambda) \Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda) = 0.$$

利用 Fubini 定理, 得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\sigma - \lambda)^2} r(\lambda) \Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda) d\sigma = 0,$$

即

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\nu} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda)}{\lambda - (\sigma + i\varepsilon)} \Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda) d\sigma = 0.$$

因为 $\Delta = (\mu, \nu]$ 任意, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda)}{\lambda - (\sigma + i\varepsilon)} \Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda) = 0,$$

即

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_{\Delta} \frac{r(\lambda)}{\lambda - (\sigma + i\varepsilon)} \Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

或

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_{\Delta} \int_0^s \frac{r(\lambda)}{\lambda - (\sigma + i\varepsilon)} \theta(x, \lambda) dx d\rho(\lambda) = 0.$$

于是

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_0^s \left(\int_{\Delta} \frac{r(\lambda)}{\lambda - (\sigma + i\varepsilon)} \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) \right) dx = 0,$$

即

$$\int_0^s \left(\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_{\Delta} \frac{r(\lambda)}{\lambda - (\sigma + i\varepsilon)} \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) \right) dx = 0.$$

因为 s 任意, 所以

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_{\Delta} \frac{r(\lambda)}{\lambda - (\sigma + i\varepsilon)} \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) = 0.$$

记

$$H_{\Delta}(x, \xi) = \int_{\Delta} \frac{r(\lambda)}{\lambda - \xi} \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad \xi = \sigma + i\varepsilon, \varepsilon > 0,$$

则

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} H_{\Delta}(x, \xi) = 0, \quad \text{在 } L^2[0, \infty) \text{ 意义下,}$$

所以应当由 $\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} h_{\Delta} = 0$ 得到 $\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} H_{\Delta}(x, \xi) = 0$, 然后倒推回去得出 $r = 0$. 下面开始正式证明.

(1) 令

$$H_{\Delta}(x, \xi) = \int_{\Delta} \frac{r(\lambda)}{\lambda - \xi} \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad \operatorname{Im} \xi > 0.$$

因为 $r \in L^2_{\rho}(-\infty, \infty)$,

$$\left| \frac{r(\lambda)}{\lambda - \xi} \right|^2 = \frac{|r(\lambda)|^2}{(\operatorname{Re} \xi - \lambda)^2 + (\operatorname{Im} \xi)^2} \leq \frac{|r(\lambda)|^2}{(\operatorname{Im} \xi)^2},$$

所以

$$\frac{r}{\lambda - \xi} \in L^2_{\rho}(-\infty, \infty).$$

由引理 3.8.1, 存在 $H(\cdot, \xi) \in L^2[0, \infty)$, 使得

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} H_{\Delta}(\cdot, \xi) = H(\cdot, \xi), \quad \text{在 } L^2[0, \infty) \text{ 意义下.}$$

可是 $M\theta = \lambda\theta$, 故

$$\begin{aligned} MH_{\Delta} &= \int_{\Delta} \frac{r(\lambda)}{\lambda - \xi} \lambda \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) \\ &= \int_{\Delta} r(\lambda) \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) + \xi \int_{\Delta} \frac{r(\lambda)}{\lambda - \xi} \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) \\ &= h_{\Delta} + \xi H_{\Delta}, \end{aligned}$$

即

$$(M - \xi)H_{\Delta} = h_{\Delta}.$$

注意到 H_{Δ} 在 0 点满足 θ 适合的边条件, 即

$$\sin \alpha H_{\Delta}(0, \xi) - \cos \alpha p(0) H'_{\Delta}(0, \xi) = 0.$$

而 $My = \xi y$ 有两个线性无关的解 $\varphi(x, \xi)$ 和 $\theta(x, \xi)$, 用常数变易法知非齐次微分方程 $(M - \xi)y = h_{\Delta}$ 的解应该是

$$y = C_1 \varphi(x, \xi) + C_2 \theta(x, \xi) + \int_0^x (\varphi(x, \xi) \theta(t, \xi) - \varphi(t, \xi) \theta(x, \xi)) h_{\Delta}(t) dt.$$

特别地, $H_{\Delta}(x, \xi)$ 可以这样表示, 因为 H_{Δ} 与 θ 在 0 点满足同一边条件, 可是 φ 却不满足这一边条件, 故

$$C_1 = 0,$$

所以

$$H_{\Delta}(x, \xi) = C_{\Delta}\theta(x, \xi) + \int_0^x (\varphi(x, \xi)\theta(t, \xi) - \varphi(t, \xi)\theta(x, \xi)) h_{\Delta}(t) dt.$$

由于 $\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} h_{\Delta} = 0$ ($L^2[0, \infty)$ 意义下), 利用范数收敛必弱收敛的性质, 可得

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_0^x (\varphi(x, \xi)\theta(t, \xi) - \varphi(t, \xi)\theta(x, \xi)) h_{\Delta}(t) dt = 0,$$

而 $\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} H_{\Delta} = H$ ($L^2[0, \infty)$ 意义下), 有子列几乎处处收敛, 所以

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} C_{\Delta}\theta(x, \xi) = H(x, \xi), \text{ p.p. (对 } x \text{ 而言)}$$

即存在 c 使得

$$H(x, \xi) = c\theta(x, \xi), \quad (\text{p.p. 对 } x \text{ 而言})$$

可是在极限点情形下, $\theta \notin L^2[0, \infty)$. 因此 $c = 0$,

$$H(x, \xi) = 0, \quad \text{Im}\xi > 0.$$

(2) 令

$$\Gamma_s(x) = \int_0^s \theta(x, \lambda) dx = \int_0^{\infty} \chi_{[0, s]}(x) \theta(x, \lambda) dx,$$

因为 $\chi_{[0, s]} \in L^2[0, \infty)$, 所以 $\Gamma_s = \widehat{\chi}_{[0, s]} \in L_{\rho}^2(-\infty, \infty)$,

$$\int_0^s H_{\Delta}(x, \xi) dx = \int_0^s \int_{\Delta} \frac{r(\lambda)}{\lambda - \xi} \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) dx = \int_{\Delta} \frac{r(\lambda)}{\lambda - \xi} \Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda).$$

$\{H_{\Delta}\}$ 在 $L^2[0, \infty)$ 中收敛到 0, 必弱收敛到 0, 故

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_{\Delta} \frac{r(\lambda)}{\lambda - \xi} \Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda) &= \lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_0^s H_{\Delta}(x, \xi) dx \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_0^{\infty} H_{\Delta}(x, \xi) \chi_{[0, s]}(x) dx = 0, \end{aligned}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda)}{\lambda - \xi} \Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda) = 0.$$

不妨假设定理里给的 g 是实的. 不然的话, 可以将 g 分解为 $g = g_1 + ig_2$, g_1, g_2 为实函数且 $g_1, g_2 \in L_{\rho}^2(-\infty, \infty)$. 当 g 实时, 因为对实的 λ , $\theta(x, \lambda)$ 是实的, 于是 f_{Δ} 为实函数, 从而 f 为实函数, 那么 \widehat{f} 也是实的, 于是 r 是实的. 对 $\xi = \sigma + i\varepsilon$,

$$0 = \int_{\mu}^{\nu} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda)}{\lambda - \xi} \Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda) d\sigma = \int_{\mu}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon r(\lambda)}{(\lambda - \sigma)^2 + \varepsilon^2} \Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda) d\sigma. \quad (3.3)$$

因为 $r, \Gamma_s \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, $\int_{-\infty}^{\infty} |r(\lambda)\Gamma_s(\lambda)| d\rho(\lambda) < \infty$, 所以由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} (3.3) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mu}^{\nu} \frac{\varepsilon}{(\lambda - \sigma)^2 + \varepsilon^2} r(\lambda)\Gamma_s(\lambda) d\sigma d\rho(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\arctan \frac{\nu - \lambda}{\varepsilon} - \arctan \frac{\mu - \lambda}{\varepsilon} \right) r(\lambda)\Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda), \end{aligned}$$

让 $\varepsilon \rightarrow +0$ 得

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\arctan \frac{\nu - \lambda}{\varepsilon} - \arctan \frac{\mu - \lambda}{\varepsilon} \right) r(\lambda)\Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda),$$

由 Lebesgue 控制收敛定理, 当 μ, ν 都是 ρ 的连续点时,

$$\text{上式右端} = \pi \int_{\mu}^{\nu} r(\lambda)\Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda),$$

所以

$$\int_{\mu}^{\nu} r(\lambda)\Gamma_s(\lambda) d\rho(\lambda) = 0, \quad \mu, \nu \text{ 都是 } \rho \text{ 的连续点},$$

即

$$0 = \int_{\Delta} r(\lambda) \int_0^s \theta(x, \lambda) dx d\rho(\lambda) = \int_0^s \int_{\Delta} r(\lambda) \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) dx = \int_0^s h_{\Delta}(x) dx,$$

所以 $h_{\Delta}(x) = 0$, $\Delta = (\mu, \nu]$, μ, ν 是 ρ 的连续点.

(3) 若 $\cos \alpha \neq 0$, 因为 $\theta(0, \lambda) = \cos \alpha$, 故由 $h_{\Delta}(0) = 0$ 得

$$\int_{\Delta} r(\lambda) d\rho(\lambda) = 0.$$

当 $\cos \alpha = 0$ 时, $\sin \alpha \neq 0$, 由

$$\begin{aligned} 0 = h'_{\Delta}(x) &= \int_{\Delta} r(\lambda) \theta'(x, \lambda) d\rho(\lambda), \\ h'_{\Delta}(0) &= 0. \end{aligned}$$

同样, 可得

$$\int_{\Delta} r(\lambda) d\rho(\lambda) = 0, \quad \Delta = (\mu, \nu], \quad \mu, \nu \text{ 是 } \rho \text{ 的连续点}.$$

设 ω 是 $\rho(\lambda)$ 的间断点, 因为 $\rho(\lambda)$ 的间断点可数, 任何含 ω 的区间 Δ 里都必有 ρ 的连续点 μ, ν 使 $\mu < \omega < \nu$. 所以存在 $\{\mu_n\}, \{\nu_n\}$ 都是 $\rho(\lambda)$ 的连续点, 使得

$$\mu_n < \mu_{n+1} < \omega < \nu_{n+1} < \nu_n, \mu_n \uparrow \omega, \nu_n \downarrow \omega,$$

$$0 = \int_{\mu_n}^{\nu_n} r(\lambda) d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[\mu_n, \nu_n]}(\lambda) r(\lambda) d\rho(\lambda),$$

$$|\chi_{[\mu_n, \nu_n]}(\lambda) r(\lambda)| \leq |r(\lambda)| \chi_{[\mu_1, \nu_1]}(\lambda).$$

由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[\mu_n, \nu_n]}(\lambda) r(\lambda) d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[\mu_n, \nu_n]}(\lambda) r(\lambda) d\rho(\lambda)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{\omega\}}(\lambda) r(\lambda) d\rho(\lambda) = r(\omega) (\rho(\omega) - \rho(\omega - 0)),$$

所以

$$r(\omega) = 0.$$

于是

$$\int_K r(\lambda) d\rho(\lambda) = 0, \quad \forall \mu < \nu,$$

其中, K 为 $[\mu, \nu]$ 或 (μ, ν) , $(\mu, \nu]$, (μ, ν) , 所以对任何阶梯函数 $s(\lambda)$, 都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) s(\lambda) d\rho(\lambda) = 0.$$

由于阶梯函数在 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 中稠, 故 $r = 0$.

定理 3.8.4 设 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓,

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \sin \alpha f(0) - \cos \alpha p(0) f'(0) = 0\},$$

则

(1) $\forall f \in \mathcal{D}(T)$, 有 $\widehat{f}, \lambda \widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 且

$$\widehat{Tf} = \lambda \widehat{f};$$

(2) $f \in \mathcal{D}(T) \Leftrightarrow \widehat{f}, \lambda \widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$.

证明 (1) $\forall f \in \mathcal{D}(T)$, 有 $\widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 记

$$f_\Delta(x) = \int_\Delta \widehat{f}(\lambda) \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad \Delta = (\mu, \nu],$$

则由定理 3.8.2 的证明, $f_\Delta \in L^2[0, \infty)$ 且

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} f_\Delta = f, \quad \text{在 } L^2[0, \infty) \text{ 意义下.}$$

因为 Δ 为有限区间, 所以

$$Mf_\Delta(x) = \int_\Delta \widehat{f}(\lambda) M\theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) = \int_\Delta \lambda \widehat{f}(\lambda) \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda).$$

令

$$g_{\Delta}(\lambda) = \begin{cases} \lambda \widehat{f}(\lambda), & \lambda \in \Delta, \\ 0, & \lambda \notin \Delta, \end{cases}$$

显然 $g_{\Delta} \in L^2_{\rho}(-\infty, \infty)$, 而当 Δ_1 为有限区间时 (根据引理 3.8.1),

$$\int_{\Delta_1} g_{\Delta}(\lambda) \theta(\cdot, \lambda) d\rho(\lambda) \in L^2[0, \infty).$$

由于 $\Delta_1 \supset \Delta$ 时,

$$\int_{\Delta_1} g_{\Delta}(\lambda) \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) = \int_{\Delta} \lambda \widehat{f}(\lambda) \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) = Mf_{\Delta}(x),$$

由引理 3.8.1,

$$\lim_{\Delta_1 \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_{\Delta_1} g_{\Delta}(\lambda) \theta(\cdot, \lambda) d\rho(\lambda) = \lim_{\Delta_1 \rightarrow (-\infty, \infty)} Mf_{\Delta}(\cdot) = Mf_{\Delta}, \quad \text{在 } L^2[0, \infty) \text{ 意义下.}$$

故 $Mf_{\Delta} \in L^2[0, \infty)$ 且由定理 3.8.3,

$$\widehat{Mf_{\Delta}} = g_{\Delta}.$$

由于 θ 满足

$$\sin \alpha \theta(0) - \cos \alpha p(0) \theta'(0) = 0,$$

f_{Δ} 也满足同样的边界条件, 所以 $f_{\Delta} \in \mathcal{D}(T)$. 这样对任意的 $h \in \mathcal{D}(T)$, 有

$$\begin{aligned} (f_{\Delta}, Th) &= (Tf_{\Delta}, h) = (Mf_{\Delta}, h) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Mf_{\Delta}}(\lambda) \overline{\widehat{h}(\lambda)} d\rho(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_{\Delta}(\lambda) \overline{\widehat{h}(\lambda)} d\rho(\lambda) = \int_{\Delta} \lambda \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{h}(\lambda)} d\rho(\lambda). \end{aligned}$$

让 $\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)$, 因为范数收敛必弱收敛, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Tf}(\lambda) \overline{\widehat{h}(\lambda)} d\rho(\lambda) = (Tf, h) = (f, Th) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{h}(\lambda)} d\rho(\lambda).$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{Tf}(\lambda) - \lambda \widehat{f}(\lambda)) \overline{\widehat{h}(\lambda)} d\rho(\lambda) = 0, \quad h \in \mathcal{D}(T).$$

因为 U 是酉算子, $\{\widehat{h} | h \in \mathcal{D}(T)\}$ 在 $L^2_{\rho}(-\infty, \infty)$ 中稠, 所以

$$\widehat{Tf} = \lambda \widehat{f}$$

且 $\lambda \widehat{f} \in L^2_{\rho}(-\infty, \infty)$.

(2) 设 $f \in L^2[0, \infty)$, 使得 $\widehat{f}, \lambda \widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 则对任意的 $h \in \mathcal{D}(T)$, 有

$$\begin{aligned}(Th, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Th}(\lambda) \overline{\widehat{f}(\lambda)} d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \widehat{h}(\lambda) \overline{\widehat{f}(\lambda)} d\rho(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\lambda) \overline{\lambda \widehat{f}(\lambda)} d\rho(\lambda) = \left(\widehat{h}, \lambda \widehat{f} \right)_\rho = \left(h, U^{-1}(\lambda \widehat{f}) \right),\end{aligned}$$

所以 $f \in \mathcal{D}(T)$ 而 $Tf = U^{-1}(\lambda \widehat{f})$.

推论 3.8.1 $\|Tf\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda \widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda), f \in \mathcal{D}(T)$.

推论 3.8.2 (谱分解的乘法算子形式) 设 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓, 则

$$U: L^2[-\infty, \infty) \rightarrow L^2_\rho(-\infty, \infty),$$

$$Uf = \widehat{f} = \int_0^\infty f(x) \theta(x, \cdot) dx$$

是酉算子, 而 T 与 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 上的乘法算子 A

$$\mathcal{D}(A) = \{g \in L^2_\rho(-\infty, \infty) \mid \lambda g \in L^2_\rho(-\infty, \infty)\},$$

$$Ag = \lambda g, \quad g \in \mathcal{D}(A)$$

酉等价.

证明 (1) $U\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(A)$.

由定理 3.8.4, $U\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(A)$. 反过来. 若 $g \in \mathcal{D}(A)$, 则有 $f \in L^2[0, \infty)$ 使 $g = \widehat{f}$, 而 $\lambda \widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 所以 $f \in \mathcal{D}(T)$ 而 $Uf = \widehat{f} = g$, 于是 $\mathcal{D}(A) \subset U\mathcal{D}(T)$.

(2) 对任意的 $f \in \mathcal{D}(T)$, 有

$$U^{-1}AUf = U^{-1}A\widehat{f} = U^{-1}(\lambda \widehat{f}) = Tf.$$

对任意的 $g \in \mathcal{D}(A)$, 有 $f \in L^2[0, \infty)$ 使 $g = \widehat{f}$, 因为 $\lambda g \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 所以 $f \in \mathcal{D}(T)$,

$$UTU^{-1}g = UTU^{-1}\widehat{f} = UTf = \widehat{Tf} = \lambda \widehat{f} = \lambda g.$$

3.9 极限点情形的谱与谱分解

设 T 是最小算子 $T_0(M)$ 的自伴延拓

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \sin \alpha f(0) - \cos \alpha p(0) f'(0) = 0\}.$$

引理 3.9.1 如果谱函数 $\rho(\lambda)$ 在 λ_0 有跳跃, 则 λ_0 是 T 的特征值.

证明 设 $\rho(\lambda_0+0) - \rho(\lambda_0-0) = k_0 > 0$, 则 $\forall f \in L^2[0, \infty)$, 满足 $\text{supp} f \subset [0, a]$, 有

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_0^a f(x)\theta(x, \lambda)dx$$

是 λ 的连续函数.

$$\int_0^a |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \geq k_0 |\widehat{f}(\lambda_0)|^2,$$

取

$$f(x) = \begin{cases} \theta(x, \lambda_0), & x \in [0, a], \\ 0, & x > a, \end{cases}$$

则

$$\int_0^a |\theta(x, \lambda_0)|^2 dx \geq k_0 \left(\int_0^a |\theta(x, \lambda_0)|^2 dx \right)^2,$$

即

$$\int_0^a |\theta(x, \lambda_0)|^2 dx \leq \frac{1}{k_0},$$

右端与 a 无关, 故 $\theta(\cdot, \lambda_0) \in L^2[0, \infty)$, 注意到 θ 在零点满足的边界条件使得 $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$, 对应的特征函数是 $\theta(\cdot, \lambda_0)$.

定理 3.9.1 设 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda_0 I - T$ 是单射, $f \in L^2[0, \infty)$, 则

$$f \in \text{ran}(\lambda_0 I - T) = \mathcal{D}((\lambda_0 I - T)^{-1}) \Leftrightarrow \frac{\widehat{f}}{\lambda_0 - \lambda} \in L^2_\rho(-\infty, \infty).$$

这时

$$U((\lambda_0 I - T)^{-1}f) = \frac{\widehat{f}}{\lambda_0 - \lambda}$$

且

$$(\lambda_0 I - T)^{-1}f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}}{\lambda_0 - \lambda} \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda).$$

注 特别地, 若 $\text{Im}\mu \neq 0$, 则

$$R_\mu f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}}{\mu - \lambda} \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad f \in L^2[0, \infty).$$

证明 (1) \Rightarrow 设 $f \in \text{ran}(\lambda_0 I - T)$, 则存在 $g \in \mathcal{D}(T)$, 使得

$$f = (\lambda_0 I - T)g = \lambda_0 g - Tg.$$

于是

$$\widehat{f} = U(\lambda_0 g - Tg) = (\lambda_0 - \lambda)\widehat{g},$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda) - (\lambda_0 - \lambda)\hat{g}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda_0 - \lambda|^2 \left| \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} - \hat{g}(\lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) = 0.$$

当 $\text{Im}\lambda_0 \neq 0$ 时,

$$(\text{Im}\lambda_0)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} - \hat{g}(\lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) = 0,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} - \hat{g}(\lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) = 0,$$

$$\frac{\hat{f}}{\lambda_0 - \lambda} = \hat{g} \in L^2_\rho(-\infty, \infty).$$

当 $\text{Im}\lambda_0 = 0$ 时, 因为 $\lambda_0 I - T$ 是一一的, λ_0 不是特征值, 因此由引理 3.9.1, λ_0 是 $\rho(\lambda)$ 的连续点, $\{\lambda_0\}$ 对 ρ 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度来说是零测集. 对任意的 $\mu > \lambda_0$,

$$0 \leq (\mu - \lambda_0)^2 \int_{\mu}^{\infty} \left| \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} - \hat{g}(\lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) \leq \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^2 \left| \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} - \hat{g}(\lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) = 0,$$

所以

$$\int_{\mu}^{\infty} \left| \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} - \hat{g}(\lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) = 0,$$

$$\int_{(\lambda_0, \infty)} \left| \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} - \hat{g}(\lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) = 0.$$

同理

$$\int_{(-\infty, \lambda_0)} \left| \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} - \hat{g}(\lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) = 0.$$

而 $\{\lambda_0\}$ 对 ρ 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度来说是零测度集, 故

$$\int_{\{\lambda_0\}} \left| \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} - \hat{g}(\lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) = 0.$$

因此也有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} - \hat{g}(\lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) = 0,$$

$$\frac{\widehat{f}}{\lambda_0 - \lambda} = \widehat{g} \in L^2_\rho(-\infty, \infty).$$

(2) \Leftarrow 设 $\frac{\widehat{f}}{\lambda_0 - \lambda} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 由于 U 是满的, 所以存在 $g \in L^2[0, \infty)$, 使得

$$\frac{\widehat{f}}{\lambda_0 - \lambda} = \widehat{g},$$

$$\widehat{f} = (\lambda_0 - \lambda)\widehat{g} \quad (\text{作为 } L^2_\rho(-\infty, \infty) \text{ 的元素}).$$

所以

$$\lambda\widehat{g} = \lambda_0\widehat{g} - \widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty).$$

由定理 3.8.4 得 $g \in \mathcal{D}(T)$, 而

$$f = U^{-1}\widehat{f} = U^{-1}(\lambda_0\widehat{g} - \lambda\widehat{g}) = \lambda_0 g - Tg = (\lambda_0 I - T)g \in \text{ran}(\lambda_0 I - T).$$

对于 $f \in \text{ran}(\lambda_0 I - T)$,

$$f = (\lambda_0 I - T)g, \quad g \in \mathcal{D}(T),$$

$$\widehat{f} = \lambda_0\widehat{g} - \lambda\widehat{g}, \quad \widehat{g} = \frac{\widehat{f}}{\lambda_0 - \lambda},$$

所以

$$U((\lambda_0 I - T)^{-1}f) = \widehat{g} = \frac{\widehat{f}}{\lambda_0 - \lambda},$$

$$\begin{aligned} (\lambda_0 I - T)^{-1}f &= U^{-1}(U((\lambda_0 I - T)^{-1}f)) \\ &= U^{-1}\left(\frac{\widehat{f}}{\lambda_0 - \lambda}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} \theta(\cdot, \lambda) d\rho(\lambda). \end{aligned}$$

定理 3.9.2 如果存在 $\delta > 0$, 使得 $\rho(\lambda)$ 在 $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ 上为常数, 则

$$\lambda_0 \in \rho(T)$$

且

$$\|R_{\lambda_0}\| \leq \frac{1}{\delta}.$$

证明 (1) $\lambda_0 I - T$ 是单射.

若

$$(\lambda_0 I - T)u = 0,$$

即

$$\begin{aligned} 0 &= \|(\lambda_0 I - T)u\|^2 = \|U((\lambda_0 I - T)u)\|_\rho^2 = \|\lambda_0 \widehat{u} - \widehat{T}u\|_\rho^2 \\ &= \|\lambda_0 \widehat{u} - \lambda \widehat{u}\|_\rho^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^2 |\widehat{u}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda). \end{aligned}$$

与定理 3.9.1 的证明相同可得

$$\int_{(\lambda_0, \infty)} |\widehat{u}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = \int_{(-\infty, \lambda_0)} |\widehat{u}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = 0.$$

由于 ρ 在 $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ 上为常数, 故

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = 0,$$

即 $\widehat{u} = 0$, 所以 $u = 0$.

(2) $\lambda_0 I - T$ 是满射.

对任意的 $f \in L^2[0, \infty)$, 有 $\widehat{f} \in L_\rho^2(-\infty, \infty)$, 而

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} \right|^2 d\rho(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\lambda_0 - \delta} \left| \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} \right|^2 d\rho(\lambda) + \int_{\lambda_0 + \delta}^{\infty} \left| \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} \right|^2 d\rho(\lambda) \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \left(\int_{-\infty}^{\lambda_0 - \delta} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) + \int_{\lambda_0 + \delta}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right) \\ &= \frac{1}{\delta^2} \|\widehat{f}\|^2 = \frac{1}{\delta^2} \|f\|^2. \end{aligned}$$

由定理 3.9.1, $f \in \text{ran}(\lambda_0 I - T) = \mathcal{D}((\lambda_0 I - T)^{-1})$ 且

$$U((\lambda_0 I - T)^{-1}f) = \frac{\widehat{f}}{\lambda_0 - \lambda},$$

这表示 $\text{ran}(\lambda_0 I - T) = \mathcal{D}((\lambda_0 I - T)^{-1}) = L^2[0, \infty)$.

(3) $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ 有界.

由于

$$\begin{aligned} \|R_{\lambda_0} f\|^2 &= \|(\lambda_0 I - T)^{-1} f\|^2 = \|U((\lambda_0 I - T)^{-1} f)\|_\rho^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} \right|^2 d\rho(\lambda) \leq \frac{1}{\delta^2} \|f\|^2, \end{aligned}$$

所以 $\|R_{\lambda_0}\| \leq \frac{1}{\delta}$.

定理 3.9.3 λ_0 是 T 的特征值的充要条件是 $\rho(\lambda)$ 在 λ_0 有跳跃, 跃度 $= \frac{1}{\|\theta(\cdot, \lambda_0)\|^2}$.
 对应于 λ_0 的特征函数是 $\theta(\cdot, \lambda_0)$.

证明 \Leftarrow 见引理 3.9.1.

\Rightarrow 设 λ_0 是特征值, 由于 θ 满足 0 点的边界条件, 所以 $\theta(\cdot, \lambda_0)$ 是对应的特征函数. 于是 $\hat{\theta}(\cdot, \lambda_0), \lambda\hat{\theta}(\cdot, \lambda_0) \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$,

$$\lambda\hat{\theta}(\lambda) = U(T\theta(\cdot, \lambda_0))(\lambda) = U(\lambda_0\theta(\cdot, \lambda_0))(\lambda) = \lambda_0\hat{\theta}(\lambda),$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\lambda - \lambda_0)\hat{\theta}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = 0.$$

由此

$$\int_{(-\infty, \lambda_0)} |\hat{\theta}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = \int_{(\lambda_0, \infty)} |\hat{\theta}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = 0,$$

故

$$\begin{aligned} 0 \neq \|\theta(\cdot, \lambda_0)\|^2 &= \|\hat{\theta}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \\ &= \left(\int_{(-\infty, \lambda_0)} + \int_{\{\lambda_0\}} + \int_{(\lambda_0, \infty)} \right) |\hat{\theta}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \\ &= |\hat{\theta}(\lambda_0)|^2 (\rho(\lambda_0 + 0) - \rho(\lambda_0 - 0)) = k_0 |\hat{\theta}(\lambda_0)|^2, \end{aligned}$$

这表示 ρ 在 λ_0 有跳跃. 注意到在 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 意义下,

$$\hat{\theta}_a(\lambda) = \int_0^a \theta(x, \lambda_0)\theta(x, \lambda)dx \rightarrow \hat{\theta}(\lambda), \quad a \rightarrow \infty.$$

设 Δ 是含 λ_0 的区间, 则当 a 充分大时, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}_a(\lambda) - \hat{\theta}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \geq \int_{\Delta} |\hat{\theta}_a(\lambda) - \hat{\theta}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \geq |\hat{\theta}_a(\lambda_0) - \hat{\theta}(\lambda_0)|^2 k_0.$$

当 $a \rightarrow \infty$ 时, 上式左端趋于 0, 故

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\lambda_0) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \hat{\theta}_a(\lambda_0) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \theta(x, \lambda_0)\theta(x, \lambda_0)dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a |\theta(x, \lambda_0)|^2 dx = \|\theta(\cdot, \lambda_0)\|^2, \end{aligned}$$

这样便有

$$|\hat{\theta}(\lambda_0)|^2 = \|\theta(\cdot, \lambda_0)\|^4,$$

所以 $k_0 = 1/\|\theta(\cdot, \lambda_0)\|^2$.

定理 3.9.4 设 λ_0 是 ρ 的连续增长点 (即 ρ 在 λ_0 点连续, 并且 $\forall \delta > 0$, $\rho(\lambda_0 + \delta) > \rho(\lambda_0 - \delta)$), 则 λ_0 是 T 的连续谱点.

证明 (1) 由于 λ_0 不是特征值, 所以 $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ 存在. 现在证明 $\mathcal{D}((\lambda_0 I - T)^{-1})$ 在 $L^2[0, \infty)$ 中稠. 对任意的 $f \in L^2[0, \infty)$, 有 $\hat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$. 而

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) \theta(\cdot, \lambda) d\rho(\lambda), \quad \text{在 } L^2_\rho(-\infty, \infty) \text{ 意义下.}$$

令

$$g(\lambda) = \begin{cases} \hat{f}(\lambda), & \lambda \leq \lambda_0 - \delta \text{ 或 } \lambda > \lambda_0 + \delta, \\ 0, & \lambda_0 - \delta < \lambda \leq \lambda_0 + \delta, \end{cases}$$

则 $g \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 存在 $h \in L^2[0, \infty)$, 使得 $g = \hat{h}$,

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \theta(\cdot, \lambda) d\rho(\lambda).$$

由于

$$\|f - h\|^2 = \|\hat{f} - \hat{h}\|_\rho^2 = \int_{\lambda_0 - \delta < \lambda \leq \lambda_0 + \delta} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda),$$

而 $\hat{f} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 利用积分的绝对连续性, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 使得 $m_\rho(E) < \delta_1$ 时有

$$\int_E |\hat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) < \varepsilon.$$

可是 λ_0 是 ρ 的连续点, 所以存在 $\delta > 0$, 使得

$$m_\rho((\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]) = \rho(\lambda_0 + \delta) - \rho(\lambda_0 - \delta) < \delta_1,$$

因此

$$\|f - h\|^2 < \varepsilon.$$

可是

$$\frac{\hat{h}(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} = \begin{cases} \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda - \lambda_0}, & \lambda \leq \lambda_0 - \delta, \lambda > \lambda_0 + \delta, \\ 0, & \lambda_0 - \delta < \lambda \leq \lambda_0 + \delta, \end{cases}$$

所以

$$\left| \frac{\hat{h}(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} \right| \leq \frac{1}{\delta} |\hat{f}(\lambda)|, \quad \frac{\hat{h}(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} \in L^2_\rho(-\infty, \infty).$$

由定理 3.9.1,

$$h \in \mathcal{D}((\lambda_0 I - T)^{-1}),$$

故 $\mathcal{D}((\lambda_0 I - T)^{-1})$ 在 $L^2[0, \infty)$ 中稠.

(2) $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ 无界.

取

$$g_n(\lambda) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} < |\lambda - \lambda_0| \leq \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{其余的 } \lambda, \end{cases}$$

则 $g_n \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 存在 $h_n \in L^2[0, \infty)$, 使得 $\hat{h}_n = g_n$. 因为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{g_n(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} \right|^2 d\rho(\lambda) &= \int_{\frac{1}{n} < |\lambda - \lambda_0| \leq \frac{2}{n}} \frac{1}{|\lambda - \lambda_0|^2} d\rho(\lambda) \\ &\leq n^2 m_\rho \left(\left[\lambda_0 - \frac{2}{n}, \lambda_0 - \frac{1}{n} \right] \cup \left[\lambda_0 + \frac{1}{n}, \lambda_0 + \frac{2}{n} \right] \right) < \infty. \end{aligned}$$

故 $h_n \in \mathcal{D}((\lambda_0 I - T)^{-1})$, 而

$$\begin{aligned} \|(\lambda_0 I - T)^{-1} h_n\|^2 &= \left\| \frac{\hat{h}_n}{\lambda_0 - \lambda} \right\|_\rho^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{g_n(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} \right|^2 d\rho(\lambda) \\ &\geq \left(\frac{n}{2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |g_n(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = \left(\frac{n}{2} \right)^2 \|h_n\|^2. \end{aligned}$$

所以 $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ 无界.

推论 3.9.1 $\sigma_p(T) = \{\lambda | \lambda \text{ 为 } \rho \text{ 的间断点}\}, \sigma_c(T) = \{\lambda | \lambda \text{ 为 } \rho \text{ 的连续增长点}\}.$

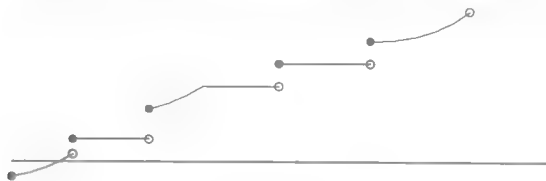


图 3.10

下面来给出 T 的谱分解, 只要定义 T 的谱族 $\{E_\lambda | \lambda \in \mathbf{R}\}$ 即可. 由推论 3.8.2, T 与 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 上的乘法算子 A 酉等价, 而 A 的谱族是知道的, 所以很自然地将通过 A 的谱族 $\{E_\mu(A) | \mu \in \mathbf{R}\}$ 来得出 T 的谱族 $\{E_\mu | \mu \in \mathbf{R}\}$

$$\begin{aligned} E_\mu f &= U^{-1} E_\mu(A) U f = U^{-1} E_\mu(A) \hat{f} = U^{-1} \begin{cases} \hat{f}(\lambda), & \lambda \leq \mu, \\ 0, & \lambda > \mu \end{cases} \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} \hat{f}(\lambda) \theta(\cdot, \lambda) d\rho(\lambda), \quad \mu \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

定理 3.9.5 令

$$E_\mu f = \int_{-\infty}^{\mu} \hat{f}(\lambda) \theta(\cdot, \lambda) d\rho(\lambda), \quad \mu \in \mathbf{R}.$$

则 $\{E_\mu | \mu \in \mathbf{R}\}$ 满足

- (1) E_μ 是正交投影算子;
- (2) 若 $\mu \leq \nu$, 则 $E_\mu \leq E_\nu$;
- (3) $E_{\mu+0} = E_\mu$;
- (4) $s - \lim_{\mu \rightarrow -\infty} E_\mu = 0$, $s - \lim_{\mu \rightarrow \infty} E_\mu = I$.

证明 (1) E_μ 是正交投影算子.

由于

$$\|E_\mu f\|^2 = \int_{-\infty}^{\mu} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = \|f\|^2, \quad E_\mu \text{ 有界,}$$

对任意的 $f, g \in L^2[0, \infty)$,

$$(E_\mu f, g) = (\widehat{E_\mu f}, \widehat{g})_\rho = \int_{-\infty}^{\mu} \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{g}(\lambda)} d\rho(\lambda) = (\widehat{f}, U(E_\mu g))_\rho = (f, E_\mu g).$$

所以 E_μ 自伴. 当 $\mu \leq \nu$ 时, 对任意的 $f, g \in L^2[0, \infty)$,

$$\begin{aligned} (E_\mu E_\nu f, g) &= (E_\nu f, E_\mu g) = (\widehat{E_\nu f}, \widehat{E_\mu g})_\rho \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{g}(\lambda)} d\rho(\lambda) = (\widehat{E_\mu f}, \widehat{g})_\rho = (E_\mu f, g), \end{aligned}$$

所以 $E_\mu E_\nu = E_\mu$. 同理, $E_\nu E_\mu = E_\mu$. 特别地, $E_\mu^2 = E_\mu$.

(2) $\mu \leq \nu, E_\mu \leq E_\nu$.

对任意的 $f \in L^2[0, \infty)$,

$$\begin{aligned} (E_\mu f, f) - \|E_\mu f\|^2 &= \|\widehat{E_\mu f}\|_\rho^2 = \int_{-\infty}^{\mu} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \leq \int_{-\infty}^{\nu} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \\ &= \|\widehat{E_\nu f}\|_\rho^2 = \|E_\nu f\|^2 = (E_\nu f, f). \end{aligned}$$

(3) $E_{\mu+0} = E_\mu$.

对任意的 $f \in L^2[0, \infty)$, $\theta > 0$, 有

$$\|E_{\mu+\theta} f - E_\mu f\|^2 = \|(E_{\mu+\theta} - E_\mu) f\|^2 = \|U(E_{\mu+\theta} - E_\mu) f\|_\rho^2 = \int_{(\mu, \mu+\theta]} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda).$$

当 $\theta \rightarrow +0$ 时, $(\mu, \mu+\theta] \rightarrow \emptyset$, 所以

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \|E_{\mu+\theta} f - E_\mu f\| = 0,$$

即

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} E_{\mu+\theta} f = E_\mu f$$

或

$$s - \lim_{\theta \rightarrow +0} E_{\mu+\theta} = E_{\mu}, \quad E_{\mu+0} = E_{\mu}.$$

$$(4) \quad s - \lim_{\mu \rightarrow -\infty} E_{\mu} = 0, \quad s - \lim_{\mu \rightarrow +\infty} E_{\mu} = I.$$

因为 $(-\infty, \mu) \rightarrow \phi, \mu \rightarrow -\infty; (-\infty, \mu) \rightarrow (-\infty, \infty), \mu \rightarrow +\infty$.

定理 3.9.6 $Tf = \int_{-\infty}^{\infty} \mu dE_{\mu}f, f \in \mathcal{D}(T).$

注 为了证明定理 3.9.6, 只需证明

$$f \in \mathcal{D}(T) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 d\|E_{\mu}f\|^2 < \infty \text{ 且 } Tf = \int_{-\infty}^{\infty} \mu dE_{\mu}f.$$

后一等式意味着

$$Tf = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty, \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} \mu dE_{\mu}f,$$

其中, $\int_{\alpha}^{\beta} \mu dE_{\mu}f$ 是 Riemann-Stieltjes 积分和数的极限.

证明

$$f \in \mathcal{D}(T) \Leftrightarrow \widehat{f}, \quad \lambda \widehat{f} \in L_{\rho}^2(-\infty, \infty).$$

由于

$$\|E_{\mu}f\|^2 = \int_{-\infty}^{\mu} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda),$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 d\|E_{\mu}f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 |\widehat{f}(\mu)|^2 d\rho(\mu),$$

而

$$\lambda \widehat{f} \in L_{\rho}^2(-\infty, \infty) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) < \infty,$$

所以

$$f \in \mathcal{D}(T) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 d\|E_{\mu}f\|^2 < \infty.$$

取 $(\alpha, \beta]$ 的分割, 记其最大长度为 l ,

$$\alpha = \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_n = \beta.$$

因为

$$\lim_{l \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu_k (E_{\mu_k}f - E_{\mu_{k-1}}f) = \int_{\alpha}^{\beta} \mu dE_{\mu}f$$

所以

$$\begin{aligned} U \left(\int_{\alpha}^{\beta} \mu dE_{\mu} f \right) &= \lim_{l \rightarrow 0} U \left(\sum_{k=1}^n \mu_k (E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}}) f \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu_k U \left((E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}}) f \right) = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu_k \widehat{f}_{(\mu_{k-1}, \mu_k]}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \left\| \lambda \widehat{f}_{(\alpha, \beta]} - \sum_{k=1}^n \mu_k \widehat{f}_{(\mu_{k-1}, \mu_k]} \right\|_{\rho}^2 &= \left\| \sum_{k=1}^n (\lambda - \mu_k) \widehat{f}_{(\mu_{k-1}, \mu_k]} \right\|_{\rho}^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{(\mu_{k-1}, \mu_k]} |\lambda - \mu_k|^2 |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \\ &\leq l^2 \int_{(\alpha, \beta]} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \leq l^2 \|f\|^2, \end{aligned}$$

所以

$$U \left(\int_{\alpha}^{\beta} \mu dE_{\mu} f \right) = \lambda \widehat{f}_{(\alpha, \beta]}.$$

于是

$$\begin{aligned} \left\| Tf - \int_{\alpha}^{\beta} \mu dE_{\mu} f \right\|^2 &= \left\| U \left(Tf - \int_{\alpha}^{\beta} \mu dE_{\mu} f \right) \right\|_{\rho}^2 = \left\| \lambda \widehat{f} - \lambda \widehat{f}_{(\alpha, \beta]} \right\|_{\rho}^2 \\ &= \int_{(-\infty, \infty) \setminus (\alpha, \beta]} \lambda^2 |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow -\infty, \beta \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty, \\ \beta \rightarrow \infty}} \int_{\alpha}^{\beta} \mu dE_{\mu} f = Tf.$$

3.10 极限圆情形的谱与谱分解

考虑 Sturm-Liouville 微分算式

$$M = -DpD + q, \quad x \in [0, \infty),$$

其中, p, q 是实的, $p' \in AC_{\text{loc}}[0, \infty)$, $q \in C[0, \infty)$ 且 $p(x) > 0$. 以 $\varphi(x, \lambda)$ 和 $\theta(x, \lambda)$ 分别表示下列 Cauchy 问题的解

$$\begin{cases} My = \lambda y, \\ y(0) = \sin \alpha, \\ p(0)y'(0) = -\cos \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} My = \lambda y, \\ y(0) = \cos \alpha, \\ p(0)y'(0) = \sin \alpha, \end{cases} \quad 0 \leq \alpha < \pi.$$

由 Liouville 公式, $\varphi(x, \lambda)$ 和 $\theta(x, \lambda)$ 的 Lagrange 双线性泛函满足

$$\begin{aligned} [\varphi(\cdot, \lambda), \theta(\cdot, \lambda)](x) &= p(x)W\left(\varphi(\cdot, \lambda), \overline{\theta(\cdot, \lambda)}\right)(x) \\ &= p(0)W\left(\varphi(\cdot, \lambda), \overline{\theta(\cdot, \lambda)}\right)(0) = 1, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

假设 M 是极限圆的, 由 3.6 节知道, $D \subset \mathcal{D}(T_1(M))$ 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓定义域的充要条件是存在矩阵

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix},$$

使得

$$(1) \operatorname{rank}(L \ N) = 2;$$

$$(2) \begin{vmatrix} l_{i1} & \overline{l_{j1}} \\ l_{i2} & \overline{l_{j2}} \end{vmatrix} = p(0) \begin{vmatrix} n_{i1} & \overline{n_{j1}} \\ n_{i2} & \overline{n_{j2}} \end{vmatrix}, \quad i, j = 1, 2;$$

$$(3) D = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \left| L \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} [f, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) \\ [f, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) \end{pmatrix} = 0 \right. \right\}, \text{ 其中, } \lambda$$

是实数.

这一节给出 $T_0(M)$ 的自伴延拓的谱分解.

引理 3.10.1 对任何 $\mu \in \mathbf{C}$ 和 $f \in L^2[0, \infty)$, 存在 $y \in \mathcal{D}(T_1(M))$, 使得 $\mu y - My = f$.

证明 $\varphi(x, \mu)$ 和 $\theta(x, \mu)$ 是 $My = \mu y$ 的两个线性无关的解, 对微分方程 $\mu y - My = f$ 用常数变易法可求得

$$y(x) = C_1 \varphi(x, \mu) + C_2 \theta(x, \mu) + \int_0^x (\varphi(t, \mu) \theta(x, \mu) - \varphi(x, \mu) \theta(t, \mu)) f(t) dt.$$

因为 M 是极限圆的, $\varphi(\cdot, \mu), \theta(\cdot, \mu) \in L^2[0, \infty)$, 而

$$\left| \int_0^x \varphi(t, \mu) f(t) dt \right| \leq \|\varphi(\cdot, \mu)\| \|f\|,$$

$$\left| \int_0^x \theta(t, \mu) f(t) dt \right| \leq \|\theta(\cdot, \mu)\| \|f\|,$$

所以 $y \in L^2[0, \infty)$ 且 $My = \mu y - f \in L^2[0, \infty)$, 故 $y \in \mathcal{D}(T_1(M))$.

设 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓, 它的定义域是

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \left| L \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} [f, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) \\ [f, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) \end{pmatrix} = 0 \right. \right\},$$

其中,

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$$

满足 $\text{rank}(LN) = 2$ 和

$$\begin{vmatrix} l_{i1} & \overline{l_{j1}} \\ l_{i2} & \overline{l_{j2}} \end{vmatrix} = p(0) \begin{vmatrix} n_{i1} & \overline{n_{j1}} \\ n_{i2} & \overline{n_{j2}} \end{vmatrix},$$

$i, j = 1, 2$

定理 3.10.1 记 $\Delta(\mu)$ 为行列式

$$\begin{vmatrix} l_{11} \sin \alpha - \frac{l_{12} \cos \alpha}{p(0)} + n_{11}(\mu - \lambda) \int_0^\infty \varphi(t, \mu) \varphi(t, \lambda) dt + n_{12} \left(1 + (\mu - \lambda) \int_0^\infty \varphi(t, \mu) \theta(t, \lambda) dt \right) \\ l_{21} \sin \alpha - \frac{l_{22} \cos \alpha}{p(0)} + n_{21}(\mu - \lambda) \int_0^\infty \varphi(t, \mu) \varphi(t, \lambda) dt + n_{22} \left(1 + (\mu - \lambda) \int_0^\infty \varphi(t, \mu) \theta(t, \lambda) dt \right) \\ l_{11} \cos \alpha + \frac{l_{12} \sin \alpha}{p(0)} + n_{11} \left(-1 + (\mu - \lambda) \int_0^\infty \varphi(t, \lambda) \theta(t, \mu) dt \right) + n_{12}(\mu - \lambda) \int_0^\infty \theta(t, \mu) \theta(t, \lambda) dt \\ l_{21} \cos \alpha + \frac{l_{22} \sin \alpha}{p(0)} + n_{21} \left(-1 + (\mu - \lambda) \int_0^\infty \varphi(t, \lambda) \theta(t, \mu) dt \right) + n_{22}(\mu - \lambda) \int_0^\infty \theta(t, \mu) \theta(t, \lambda) dt \end{vmatrix}.$$

如果 $\Delta(\mu) \neq 0$, 则

(1) $\mu \in \rho(T)$;

(2) 存在 $K \in L^2([0, \infty) \times [0, \infty))$, 使得 $(R(\mu, T)f)(x) = \int_0^\infty K(x, t)f(t)dt, f \in L^2[0, \infty)$.

证明 (1) $\mu \in \rho(T)$.

为了证明 $\mu \in \rho(T)$, 由闭图定理, 只需证明 $\mu I - T$ 是 $\mathcal{D}(T) \rightarrow L^2[0, \infty)$ 的双射.

(1) $\mu I - T$ 是满射.

由引理 3.10.1, 对任何 $f \in L^2[0, \infty)$, 有 $y \in \mathcal{D}(T_1(M))$ 使得 $\mu y - My = f$, 下面证明可以在 $\mathcal{D}(T)$ 中取到 y . 为此, 要证明可以取到 C_1, C_2 使得引理 3.10.1 中的 y 满足 $\mathcal{D}(T)$ 的边条件

$$y(0) = C_1 \sin \alpha + C_2 \cos \alpha, \quad y'(0) = \frac{-C_1 \cos \alpha + C_2 \sin \alpha}{p(0)},$$

由 Green 公式有

$$\begin{aligned} [y, \varphi(\cdot, \lambda)](x) &= [y, \varphi(\cdot, \lambda)](0) + \int_0^x (\varphi(t, \lambda)My(t) - y(t)M\varphi(t, \lambda)) dt \\ &= p(0)W(y, \varphi(\cdot, \lambda))(0) + \int_0^x [\varphi(t, \lambda)(\mu y(t) - f(t)) - y(t)\lambda\varphi(t, \lambda)] dt \end{aligned}$$

$$= -C_2 - \int_0^x \varphi(t, \lambda) f(t) dt + (\mu - \lambda) \int_0^x \varphi(t, \lambda) y(t) dt,$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi(t, \lambda) y(t) dt &= C_1 \int_0^x \varphi(t, \mu) \varphi(t, \lambda) dt + C_2 \int_0^x \varphi(t, \lambda) \theta(t, \mu) dt \\ &\quad + \int_0^x \left(\int_0^t (\varphi(\tau, \mu) \theta(t, \mu) - \varphi(t, \mu) \theta(\tau, \mu)) f(\tau) d\tau \right) \varphi(t, \lambda) dt, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} [y, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) &= C_1 (\mu - \lambda) \int_0^\infty \varphi(t, \mu) \varphi(t, \lambda) dt \\ &\quad + C_2 \left(-1 + (\mu - \lambda) \int_0^\infty \varphi(t, \lambda) \theta(t, \mu) dt \right) - \int_0^\infty \varphi(t, \lambda) f(t) dt \\ &\quad + (\mu - \lambda) \int_0^\infty \left(\int_0^t (\varphi(\tau, \mu) \theta(t, \mu) - \varphi(t, \mu) \theta(\tau, \mu)) f(\tau) d\tau \right) \varphi(t, \lambda) dt. \end{aligned}$$

同理, 可得

$$\begin{aligned} [y, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) &= C_1 \left(1 + (\mu - \lambda) \int_0^\infty \varphi(t, \mu) \theta(t, \lambda) dt \right) \\ &\quad + C_2 (\mu - \lambda) \int_0^\infty \theta(t, \mu) \theta(t, \lambda) dt - \int_0^\infty \theta(t, \lambda) f(t) dt \\ &\quad + (\mu - \lambda) \int_0^\infty \left(\int_0^t (\varphi(\tau, \mu) \theta(t, \mu) - \varphi(t, \mu) \theta(\tau, \mu)) f(\tau) d\tau \right) \theta(t, \lambda) dt. \end{aligned}$$

这样边条件就变成

$$\begin{aligned} &C_1 \left(l_{i1} \sin \alpha - l_{i2} \frac{\cos \alpha}{P(0)} + n_{i1} (\mu - \lambda) \int_0^\infty \varphi(t, \mu) \varphi(t, \lambda) dt \right. \\ &\quad \left. + n_{i2} (1 + (\mu - \lambda) \int_0^\infty \varphi(t, \mu) \theta(t, \lambda) dt) \right) \\ &\quad + C_2 \left(l_{i1} \cos \alpha + l_{i2} \frac{\sin \alpha}{p(0)} + n_{i1} \left(-1 + (\mu - \lambda) \int_0^\infty \varphi(t, \lambda) \theta(t, \mu) dt \right) \right. \\ &\quad \left. + n_{i2} (\mu - \lambda) \int_0^\infty \theta(t, \mu) \theta(t, \lambda) dt \right) \\ &= n_{i1} \left(\int_0^\infty \varphi(t, \lambda) f(t) dt - (\mu - \lambda) \int_0^\infty \right. \\ &\quad \cdot \left(\int_0^t (\varphi(\tau, \mu) \theta(t, \mu) - \varphi(t, \mu) \theta(\tau, \mu)) f(\tau) d\tau \right) \varphi(t, \lambda) dt \Big) \\ &\quad + n_{i2} \left(\int_0^\infty \theta(t, \lambda) f(t) dt - (\mu - \lambda) \int_0^\infty \right. \\ &\quad \cdot \left(\int_0^t (\varphi(\tau, \mu) \theta(t, \mu) - \varphi(t, \mu) \theta(\tau, \mu)) f(\tau) d\tau \right) \theta(t, \lambda) dt \Big), \end{aligned}$$

$i = 1, 2$. 由于 $\Delta(\mu) \neq 0$, 可唯一解得 C_1, C_2 , 使 y 满足 $\mathcal{D}(T)$ 的边条件, 所以 $\mu I - T$ 是满射.

(ii) $\mu I - T$ 是单射.

如果 $(\mu I - T)y = 0$, $y \in \mathcal{D}(T)$, 则上面的式子右端为 0, 方程只有零解 $C_1 = C_2 = 0$. 由引理 3.10.1 中解的表达式, $y = 0$.

(2) 存在 $K(x, t)$, 使得 $(R(\mu, T)f)(x) = \int_0^\infty K(x, t)f(t)dt$, $f \in L^2[0, \infty)$.

从前边边条件的方程组可以解出

$$\begin{aligned} C_i = & a_{i1} \int_0^\infty \varphi(t, \lambda) f(t) dt + a_{i2} \int_0^\infty \theta(t, \lambda) f(t) dt \\ & + a_{i3} \int_0^\infty \left(\int_0^t (\varphi(\tau, \mu) \theta(t, \mu) - \varphi(t, \mu) \theta(\tau, \mu)) f(\tau) d\tau \right) \varphi(t, \lambda) dt \\ & + a_{i4} \int_0^\infty \left(\int_0^t (\varphi(\tau, \mu) \theta(t, \mu) - \varphi(t, \mu) \theta(\tau, \mu)) f(\tau) d\tau \right) \theta(t, \lambda) dt, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^t |\varphi(\tau, \mu) \theta(t, \mu) - \varphi(t, \mu) \theta(\tau, \mu)| |f(\tau)| |\varphi(t, \lambda)| d\tau dt \\ & \leq \int_0^\infty \int_0^t (|\varphi(\tau, \mu) f(\tau)| (|\varphi(t, \mu) \theta(t, \mu)| + |\theta(\tau, \mu) f(\tau)| |\varphi(t, \mu) \varphi(t, \lambda)|)) d\tau dt \\ & \leq \left(\int_0^\infty |\varphi(\tau, \mu) f(\tau)| d\tau \right) \left(\int_0^\infty |\varphi(t, \lambda) \theta(t, \mu)| dt \right) \\ & \quad + \left(\int_0^\infty |\theta(\tau, \mu) f(\tau)| d\tau \right) \left(\int_0^\infty |\varphi(t, \mu) \varphi(t, \lambda)| dt \right) \\ & \leq 2 \|\varphi(\cdot, \mu)\| \|\varphi(\cdot, \lambda)\| \|\theta(\cdot, \mu)\| \|f\|, \end{aligned}$$

利用 Fubini 定理可以交换积分次序, 故

$$\begin{aligned} C_i = & a_{i1} \int_0^\infty \varphi(t, \lambda) f(t) dt + a_{i2} \int_0^\infty \theta(t, \lambda) f(t) dt \\ & + a_{i3} \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty (\varphi(\tau, \mu) \theta(t, \mu) - \varphi(t, \mu) \theta(\tau, \mu)) \varphi(t, \lambda) dt \right) f(\tau) d\tau \\ & + a_{i4} \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty (\varphi(\tau, \mu) \theta(t, \mu) - \varphi(t, \mu) \theta(\tau, \mu)) \theta(t, \lambda) dt \right) f(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \\ K_1(x, t) = & \varphi(x, \mu) (a_{11} \varphi(t, \lambda) + a_{12} \theta(t, \lambda) + \int_t^\infty (\varphi(t, \mu) \theta(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu) \theta(t, \mu)) \\ & \cdot (a_{13} \varphi(\tau, \lambda) + a_{14} \theta(\tau, \lambda)) d\tau) + \theta(x, \mu) (a_{21} \varphi(t, \lambda) + a_{22} \theta(t, \lambda) d\tau \\ & + \int_t^\infty (\varphi(t, \mu) \theta(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu) \theta(t, \mu)) (a_{23} \varphi(\tau, \lambda) + a_{24} \theta(\tau, \lambda)) d\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}\varphi(x, \mu)\varphi(t, \lambda) + a_{12}\varphi(x, \mu)\theta(t, \lambda) + a_{21}\theta(x, \mu)\varphi(t, \lambda) \\
&\quad + a_{22}\theta(x, \mu)\theta(t, \lambda) + b_{11}(t)\varphi(x, \mu)\varphi(t, \mu) + b_{12}(t)\varphi(x, \mu)\theta(t, \mu) \\
&\quad + b_{21}(t)\theta(x, \mu)\varphi(t, \lambda) + b_{22}(t)\theta(x, \mu)\theta(t, \mu),
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
b_{11}(t) &= \int_t^\infty \theta(\tau, \mu) (a_{13}\varphi(\tau, \lambda) + a_{14}\theta(\tau, \lambda)) d\tau, \\
b_{12}(t) &= - \int_t^\infty \varphi(\tau, \mu) (a_{13}\varphi(\tau, \lambda) + a_{14}\theta(\tau, \lambda)) d\tau, \\
b_{21}(t) &= \int_t^\infty \theta(\tau, \mu) (a_{23}\varphi(\tau, \lambda) + a_{24}\theta(\tau, \lambda)) d\tau, \\
b_{22}(t) &= - \int_t^\infty \varphi(\tau, \mu) (a_{23}\varphi(\tau, \lambda) + a_{24}\theta(\tau, \lambda)) d\tau, \\
K_2(x, t) &= \begin{cases} \varphi(t, \mu)\theta(x, \mu) - \varphi(x, \mu)\theta(t, \mu), & 0 \leq t \leq x, \\ 0, & x < t < \infty, \end{cases}
\end{aligned}$$

则

$$y(x) = \int_0^\infty K(x, t)f(t)dt.$$

其中,

$$K(x, t) = K_1(x, t) + K_2(x, t).$$

(3) $K \in L^2([0, \infty) \times [0, \infty))$.

注意到

$$\begin{aligned}
|b_{i1}(t)| &= \left| \int_t^\infty \theta(\tau, \mu) (a_{i3}\varphi(\tau, \lambda) + a_{i4}\theta(\tau, \lambda)) d\tau \right| \\
&\leq |a_{i3}| \|\varphi(\cdot, \lambda)\| \|\theta(\cdot, \mu)\| + |a_{i4}| \|\theta(\cdot, \mu)\| \|\theta(\cdot, \lambda)\|, \\
|b_{i2}(t)| &\leq |a_{i3}| \|\varphi(\cdot, \mu)\| \|\varphi(\cdot, \lambda)\| + |a_{i4}| \|\varphi(\cdot, \mu)\| \|\theta(\cdot, \lambda)\|
\end{aligned}$$

都是 t 的有界函数, 所以 $K_1 \in L^2([0, \infty) \times [0, \infty))$. 而

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty |K_2(x, t)|^2 dx dt &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\varphi(t, \mu)\theta(x, \mu) - \varphi(x, \mu)\theta(t, \mu)|^2 dx dt \\
&\leq 2 \int_0^\infty \int_0^\infty (|\varphi(t, \mu)\theta(x, \mu)|^2 + |\varphi(x, \mu)\theta(t, \mu)|^2) dx dt \\
&= 4 \|\varphi(\cdot, \mu)\|^2 \|\theta(\cdot, \mu)\|^2,
\end{aligned}$$

故得 $K \in L^2([0, \infty) \times [0, \infty))$, 定理证毕.

推论 3.10.1 T 有纯点谱, $\sigma(T) = \{\mu, \Delta(\mu) = 0\}$, 特征值没有有限聚点.

证明 因为 $\Delta(\mu)$ 是 μ 的整函数, 所以特征值没有有限聚点.

推论 3.10.2 T 的规范化特征函数组成了 $L^2[0, \infty)$ 的规范正交基.

证明 如果 $\mu \in \rho(T) \cap \mathbf{R}$, 则 $\mu I - T$ 是自伴的. 对任何 $u, v \in L^2[0, \infty)$, 存在 $f, g \in \mathcal{D}(T)$, 使得

$$(\mu I - T)f = u, \quad (\mu I - T)g = v.$$

因此

$$(R(\mu, T)u, v) = (f, (\mu I - T)g) = ((\mu I - T)f, g) = (u, R(\mu, T)v),$$

这表明 $R(\mu, T)$ 是紧自伴算子. 此外,

λ_n 是 T 的特征值, 相应的规范化特征函数是 $\varphi_n(x)$

$\Leftrightarrow \mu - \lambda_n$ 是 $\mu I - T$ 的特征值, 相应的规范化特征函数是 $\varphi_n(x)$

$\Leftrightarrow (\mu I - T)y = (\mu - \lambda_n)y$ 有非零解 φ_n , $\|\varphi_n\| = 1$

$\Leftrightarrow R(\mu, T)y = \frac{1}{\mu - \lambda_n}y$ 有非零解 φ_n , $\|\varphi_n\| = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu - \lambda_n}$ 是 $R(\mu, T)$ 的特征值, 相应的规范化特征函数是 $\varphi_n(x)$.

由于 0 不是 $R(\mu, T)$ 的特征值, 所以 $\{\varphi_n | n = 1, 2, \dots\}$ 组成了 $L^2[0, \infty)$ 的规范正交基.

推论 3.10.3 设 $\sigma(T) = \{\lambda_n | n = 1, 2, \dots\}$. 与 λ_n 对应的规范化特征函数记为 φ_n . 令

$$P_\lambda f = \sum_{\lambda \leq \lambda_n} (f, \varphi_n) \varphi_n, \quad f \in L^2[0, \infty), \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

则 $\{P_\lambda | -\infty < \lambda < \infty\}$ 是 T 的谱族.

证明 主要是证明

$$Tf = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda f = \sum_n \lambda_n (f, \varphi_n) \varphi_n, \quad f \in \mathcal{D}(T).$$

设 $f \in \mathcal{D}(T)$, 记 $u = (\mu I - T)f$, 那么

$$\begin{aligned} (\mu I - T)f = u &= \sum_n (u, \varphi_n) \varphi_n = \sum_n ((\mu I - T)f, \varphi_n) \varphi_n \\ &= \mu \sum_n (f, \varphi_n) \varphi_n - \sum_n (Tf, \varphi_n) \varphi_n = \mu \sum_n (f, \varphi_n) \varphi_n - \sum_n \lambda_n (f, \varphi_n) \varphi_n. \end{aligned}$$

由于 $f = \sum_n (f, \varphi_n) \varphi_n$, 故 $Tf = \sum_n \lambda_n (f, \varphi_n) \varphi_n$.

3.11 两端均为奇异的情形

考虑 $(-\infty, \infty)$ 上定义的分算式

$$M = -DpD + q, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

这里 $p > 0$, $p' \in AC_{loc}(-\infty, \infty)$, $q \in L_{loc}(-\infty, \infty)$ 且为实值函数. $y(x, z)$ 表示微分方程 $My = zy$ 的解, 由于 p, q 是实值的, 所以当 z 为实数时, 可以要求 $y(x, z)$ 也是实的. 设 φ 和 θ 分别是微分方程 $My = zy$ 满足 Cauchy 条件

$$\begin{cases} \varphi(0, z) = \sin \alpha, \\ p(0)\varphi'(0, z) = -\cos \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta(0, z) = \cos \alpha, \\ p(0)\theta'(0, z) = \sin \alpha, \end{cases} \quad 0 \leq \alpha < \pi$$

的解, 显然 φ 和 θ 是 z 的整函数, 线性无关.

$$p(x)W(\varphi, \theta)(x) = p(0)W(\varphi, \theta)(0) = 1,$$

即

$$[\varphi, \bar{\theta}](x) = 1.$$

首先讨论 $T_0(M)$ 的亏指数. 设 $(-\infty, 0]$ 和 $[0, \infty)$ 上的 Weyl 解分别是

$$\psi_-(x, z) = \varphi(x, z) + M_-(z)\theta(x, z),$$

$$\psi_+(x, z) = \varphi(x, z) + M_+(z)\theta(x, z).$$

引理 3.11.1 设 $\operatorname{Im} z \neq 0$, 则

$$\int_{-\infty}^0 |\psi_-(x, z)|^2 dx + \int_0^{\infty} |\psi_+(x, z)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im}(M_+(z) - M_-(z))}{\operatorname{Im} z}.$$

证明 设 $a < 0$, 以

$$\psi_a(x, z) = \varphi(x, z) + m_a(z)\theta(x, z)$$

表示微分方程 $My = zy$ 的解, 它在零点满足边条件

$$\cos \alpha y(0) + \sin \alpha p(0)y'(0) = m_a(z),$$

而在 a 点满足与 z 无关的边条件

$$\cos \beta y(a) + \sin \beta p(a)y'(a) = 0, \quad 0 \leq \beta < \pi.$$

从这里可得

$$\cos \beta \varphi(a, z) + \sin \beta p(a) \varphi'(a, z) + m_a(z) (\cos \beta \theta(a, z) + \sin \beta p(a) \theta'(a, z)) = 0,$$

$$m_a(z) = -\frac{\cos \beta \varphi(a, z) + \sin \beta p(a) \varphi'(a, z)}{\cos \beta \theta(a, z) + \sin \beta p(a) \theta'(a, z)},$$

这就是 $[a, 0]$ 的 Weyl 函数, 而 $\psi_a(x, z)$ 是 $[a, 0]$ 的 Weyl 解. 因为 a 点边条件与 z 无关, 所以由

$$\begin{cases} \cos \beta \psi_a(a, z) + \sin \beta p(a) \psi'_a(a, z) = 0, \\ \cos \beta \psi_a(a, z') + \sin \beta p(a) \psi'_a(a, z') = 0 \end{cases}$$

得

$$\left[\psi_a(\cdot, z), \overline{\psi_a(\cdot, z')} \right](a) = 0.$$

这样由 Green 公式使得

$$\begin{aligned} & (z - z') \int_a^0 \psi_a(x, z) \psi_a(x, z') dx \\ &= \int_a^0 (\psi_a(x, z') M \psi_a(x, z) - \psi_a(x, z) M \psi_a(x, z')) dx \\ &= \left[\psi_a(\cdot, z), \overline{\psi_a(\cdot, z')} \right]_a^0 = \left[\psi_a(\cdot, z), \overline{\psi_a(\cdot, z')} \right](0) \\ &= \left[\varphi(\cdot, z) + m_a(z) \theta(\cdot, z), \overline{\varphi(\cdot, z') + m_a(z') \theta(\cdot, z')} \right](0) \\ &= m_a(z) \left[\theta(\cdot, z), \overline{\varphi(\cdot, z')} \right](0) + m_a(z') \left[\varphi(\cdot, z), \overline{\theta(\cdot, z')} \right](0) \\ &= m_a(z') - m_a(z). \end{aligned}$$

取一个数列 $\{a_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{a_n}(z) = M_-(z),$$

则当 $\operatorname{Im} z \neq 0, \operatorname{Im} z' \neq 0$ 时可得

$$(z - z') \int_{-\infty}^0 \psi_-(x, z) \psi_-(x, z') dx = M_-(z') - M_-(z).$$

令 $z' = \bar{z}$ 便有

$$\int_{-\infty}^0 |\psi_-(x, z)|^2 dx = -\frac{\operatorname{Im} M_-(z)}{\operatorname{Im} z}.$$

同样, 设 $b > 0$, 以

$$\psi_b(x, z) = \varphi(x, z) + m_b(z) \theta(x, z)$$

表示微分方程 $My = zy$ 满足边条件

$$\cos \alpha y(0) + \sin \alpha p(0)y'(0) = m_b(z),$$

$$\cos \gamma y(b) + \sin \gamma p(b)y'(b) = 0$$

的解, 其中,

$$m_b(z) = -\frac{\cos \gamma \varphi(b, z) + \sin \gamma p(b)\varphi'(b, z)}{\cos \gamma \theta(b, z) + \sin \gamma p(b)\theta'(b, z)}$$

是 $[0, b]$ 的 Weyl 函数, 而 $\psi_b(x, z)$ 是 $[0, b]$ 的 Weyl 解. 由于 b 点的边条件与 z 无关, 所以

$$[\psi_b(\cdot, z), \overline{\psi_b(\cdot, z')}] (b) = 0.$$

由 Green 公式,

$$\begin{aligned} & (z - z') \int_0^b \psi_b(x, z) \psi_b(x, z') dx \\ &= \int_0^b (\psi_b(x, z') M \psi_b(x, z) - \psi_b(x, z) M \psi_b(x, z')) dx \\ &= [\psi_b(\cdot, z), \overline{\psi_b(\cdot, z')}]_0^b = -[\psi_b(\cdot, z), \overline{\psi_b(\cdot, z')}] (0) \\ &= -[\varphi(\cdot, z) + m_b(z)\theta(\cdot, z), \overline{\varphi(\cdot, z') + m_b(z')\theta(\cdot, z')}] (0) \\ &= -m_b(z)[\theta(\cdot, z), \overline{\varphi(\cdot, z')}] (0) - m_b(z')[\varphi(\cdot, z), \overline{\theta(\cdot, z')}] (0) \\ &= m_b(z) - m_b(z'). \end{aligned}$$

取一数列 $\{b_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{b_n}(z) = M_+(z),$$

则当 $\operatorname{Im} z \neq 0, \operatorname{Im} z' \neq 0$ 时,

$$(z - z') \int_0^\infty \psi_+(x, z) \psi_+(x, z') dx = M_+(z) - M_+(z').$$

令 $z' = \bar{z}$ 便有

$$\int_0^\infty |\psi_+(x, z)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} M_+(z)}{\operatorname{Im} z},$$

故

$$\int_{-\infty}^0 |\psi_-(x, z)|^2 dx + \int_0^\infty |\psi_+(x, z)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im}(M_+(z) - M_-(z))}{\operatorname{Im} z}.$$

引理 3.11.2 设 $\operatorname{Im} z \neq 0$, 则 $\psi_+(x, z)$ 和 $\psi_-(x, z)$ 为 $My = zy$ 的线性无关解.

证明

$$\begin{aligned} [\psi_-, \overline{\psi_+}](0) &= [\varphi(\cdot, z) + M_-(z)\theta(\cdot, z), \overline{\varphi(\cdot, z) + M_+(z)\theta(\cdot, z)}](0) \\ &= M_-(z)[\theta(\cdot, z), \overline{\varphi(\cdot, z)}](0) + M_+(z)[\varphi(\cdot, z), \overline{\theta(\cdot, z)}](0) \\ &= M_+(z) - M_-(z). \end{aligned}$$

因为

$$\operatorname{Im}(M_+(z) - M_-(z)) = \operatorname{Im} z \left(\int_{-\infty}^0 |\psi_-(x, z)|^2 dx + \int_0^{\infty} |\psi_+(x, z)|^2 dx \right) \neq 0,$$

所以

$$[\psi_-, \overline{\psi_+}](0) \neq 0,$$

从而

$$W(\psi_-, \psi_+)(0) = \frac{1}{p(0)} [\psi_-, \overline{\psi_+}](0) \neq 0,$$

$\psi_+(x, z)$ 与 $\psi_-(x, z)$ 线性无关.

设 M 在 $-\infty(\infty)$ 处的亏指数为 (n_-, n_+) (n_+, n_-), 由 Weyl 的分类定理, $n_-, n_+ = 1$ 或 2 , 可能出现 4 种情况 (表 3.1).

表 3.1

	I	II	III	IV
$-\infty$	2	2	1	1
∞	2	1	2	1

定理 3.11.1 (Kodaira 公式) 设 $\operatorname{Im} z \neq 0$, 则 $My = zy$ 属于 $L^2(-\infty, \infty)$ 的解的个数为 $n = n_- + n_+ - 2$.

证明 情形 I $My = zy$ 的任何解均平方可积, 所以 $n = 2$.

$$2 = 2 + 2 - 2.$$

情形 II $My = zy$ 属于 $L^2(-\infty, \infty)$ 的解一定是 $\psi_+(x, z)$ 的倍数, 因为 $\theta \in L^2(-\infty, \infty)$, 所以若有非零的 $c_1\varphi + c_2\theta \in L^2(-\infty, \infty)$, 则 $c_1 \neq 0$. 于是

$$\varphi + c_3\theta \in L^2(-\infty, \infty),$$

那么 $c_3 = M_+(z)$, 否则将有 $\theta \in L^2(-\infty, \infty)$, 矛盾! 这样便得 $n = 1$,

$$1 = 2 + 1 - 2.$$

情形 III 与情形 II 相同.

情形 IV 这时 $n = 0$, 即方程无平方可积解. 若不然, 则有一解 $y(x)$ 同时在 $(-\infty, 0]$ 和 $[0, \infty)$ 上平方可积, 那么

$$y(x) = \begin{cases} c_1 \psi_-(x, z), & x \in (-\infty, 0], \\ c_2 \psi_+(x, z), & x \in [0, \infty), \end{cases}$$

于是 ψ_- 与 ψ_+ 线性相关, 与引理 3.11.2 矛盾! 故 $0 = 1 + 1 - 2$.

推论 3.11.1 $T_0(M)$ 的亏指数分别如表 3.2 所示.

表 3.2

情形 I	情形 II 或情形 III	情形 IV
(2, 2)	(1, 1)	(0, 0)

下面考虑 $T_0(M)$ 的自伴延拓, 根据推论 3.11.1, $T_0(M)$ 的自伴延拓是 $\mathcal{D}(T_1(M))$ 在所加边条件下的限制, 边条件的个数如表 3.3 所示.

表 3.3

情形 I	情形 II	情形 III	情形 IV
2	1	1	0

对于情形 IV, $T_0(M)$ 本身就是自伴算子. 对于情形 II 或情形 III, 假设 $-\infty$ 处为极限点而 ∞ 处为极限圆. 这时

$$\psi_+(x, z), \overline{\theta(x, z)} \in L^2[0, \infty).$$

设 $0 < a < b$, 可以造一个 C^∞ 函数 $\alpha(x)$, 如图 3.11 所示.

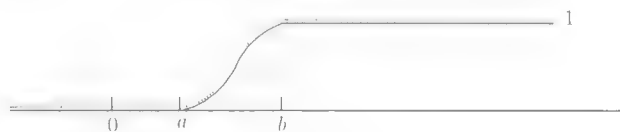


图 3.11

这件事可以这样做: 注意到

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \in C^\infty(\mathbf{R}),$$

取 $\delta < \frac{b-a}{2}$. 令

$$\tilde{\alpha}(x) = \frac{\rho(\delta^2 - (x-b)^2)}{\rho(\delta^2 - (x-b)^2) + \rho\left((x-b)^2 - \frac{\delta^2}{4}\right)},$$

由于分母从不为零, $\tilde{\alpha} \in C^\infty(\mathbf{R})$. 而

$$\tilde{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & |x-b| \geq \delta, \\ 1, & |x-b| < \frac{\delta}{2}, \end{cases}$$

修改 $\tilde{\alpha}$, 使得 $x \geq b + \frac{\delta}{2}$ 时, 函数值都取 1, 则得所要的 C^∞ 函数 $\alpha(x)$ 如图 3.12 所示.

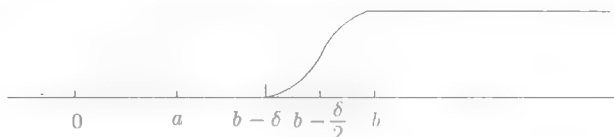


图 3.12

取

$$u = \alpha\psi_+, \quad \nu = \alpha\bar{\theta}.$$

则 $u, \nu \in \mathcal{D}(T_1(M))$.

(1) $u \notin \mathcal{D}(T_0(M))$.

因为

$$\begin{aligned} \langle u, \nu \rangle &= [u, \nu]_{-\infty}^{\infty} = [u, \nu](\infty) = [\psi_+, \bar{\theta}](\infty) = [\varphi + M_+\theta, \bar{\theta}](\infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi, \bar{\theta}](x) = \lim_{x \rightarrow \infty} p(x)W(\varphi, \theta)(x) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

这样 u 模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关.

(2) $\langle u, u \rangle = [u, u]_{-\infty}^{\infty} = [\psi_+, \psi_+](\infty) = 0$.

(3) $D = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \langle f, u \rangle = 0\}$ 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓的定义域.

$$\langle f, u \rangle = 0 \Leftrightarrow [f, u]_{-\infty}^{\infty} = 0 \Leftrightarrow [f, \psi_+](\infty) = 0,$$

所以

$$D = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid [f, \psi_+](\infty) = 0\},$$

其中, $\psi_+(x, z) = \varphi(x, z) + M_+(z, \hat{m}_\infty(z_0))\theta(x, z)$, $\text{Im} z_0 \neq 0$. 这种自伴延拓称为 $T_0(M)$ 的 Weyl-Titchmarsh 自伴延拓.

对情形 I, 取 u, ν 如图 3.13 所示,

则 $u, \nu \in \mathcal{D}(T_1(M))$.

(1) u, ν 模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关.

因为 $\varphi, \theta \in \mathcal{D}(T_1(M))$, 而

$$\begin{aligned} \langle u, \bar{\theta} \rangle &= [u, \bar{\theta}]_{-\infty}^{\infty} = [\psi_+, \bar{\theta}](\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} [\psi_+, \bar{\theta}](x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} p(x)W(\varphi, \theta)(x) = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \nu, \bar{\varphi} \rangle &= [\nu, \bar{\varphi}]_{-\infty}^{\infty} = -[\psi_-, \bar{\varphi}](-\infty) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} [\psi_-, \bar{\varphi}](x) \\ &= -M_-(z) \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)W(\theta, \varphi)(x) = M_-(z) \neq 0,\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \langle u, \bar{\varphi} \rangle & \langle u, \bar{\theta} \rangle \\ \langle \nu, \bar{\varphi} \rangle & \langle \nu, \bar{\theta} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -M_+(z) & 1 \\ M_-(z) & -1 \end{vmatrix} = M_+(z) - M_-(z) \neq 0,$$

所以 u, ν 模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关.

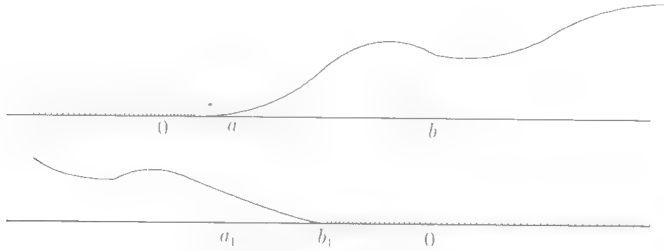


图 3.13

(2)

$$\langle u, u \rangle = [\psi_+, \psi_+](\infty) = 0,$$

$$\langle v, \nu \rangle = -[\psi_-, \psi_-](-\infty) = 0,$$

$$\langle u, \nu \rangle = [u, \nu]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

(3) $D = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \langle f, u \rangle = \langle f, \nu \rangle = 0\}$ 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓的定义域. 可是

$$\langle f, u \rangle = 0 \Leftrightarrow [f, \psi_+](\infty) = 0, \quad \langle f, \nu \rangle = 0 \Leftrightarrow [f, \psi_-](-\infty) = 0,$$

故

$$D = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid [f, \psi_+](\infty) = 0 = [f, \psi_-](-\infty)\},$$

其中,

$$\begin{aligned}\psi_+(x, z) &= \varphi(x, z) + M_+(z, \hat{m}_\infty(z_0))\theta(x, z), \\ \psi_-(x, z) &= \varphi(x, z) + M_-(z, \hat{m}_{-\infty}(z_0))\theta(x, z),\end{aligned} \quad \text{Im} z_0 \neq 0.$$

这种自伴延拓也称为 $T_0(M)$ 的 Weyl-Titchmarsh 自伴延拓. $T_0(M)$ 的一般的自伴延拓的形式见文献 [7]. 接下来讨论特征展开与谱分解.

设 φ, θ 是微分方程满足下述 Cauchy 条件的解:

$$\begin{cases} \varphi(0, z) = 1, \\ p(0)\varphi'(0, z) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta(0, z) = 0, \\ p(0)\theta'(0, z) = 1, \end{cases}$$

则 φ, θ 线性无关且由 Liouville 公式得

$$p(x)W(\varphi, \theta)(x) = 1.$$

记 $\Delta = [a, b]$, 设 $0 \in (a, b)$, $M_\Delta = M|_\Delta$, 考虑 $T_0(M_\Delta)$ 的自伴延拓 T_Δ

$$\mathcal{D}(T_\Delta) = \left\{ y \in \mathcal{D}(T_1(M_\Delta)) \left| \begin{array}{l} \cos \beta y(a) + \sin \beta p(a)y'(a) = 0, \\ \cos \gamma y(b) + \sin \gamma p(b)y'(b) = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

这里 $\beta, \gamma \in [0, \pi)$. 设 T_Δ 的特征值是 $\{\lambda_{\Delta n} | n = 1, 2, \dots\}$, 与 $\lambda_{\Delta n}$ 对应的规范化特征函数是 $h_{\Delta n}$, 则

$$h_{\Delta n} = r_{\Delta n1}\varphi(x, \lambda_{\Delta n}) + r_{\Delta n2}\theta(x, \lambda_{\Delta n}).$$

因为 $h_{\Delta n}, \varphi$ 和 θ 都是实的, 所以 $r_{\Delta n1}, r_{\Delta n2}$ 可以取成实的. 由 Parseval 等式, 对任意的 $f \in L^2(\Delta)$, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} |f(x)|^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{\Delta} f(x) h_{\Delta n}(x) dx \right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{\Delta} f(x) (r_{\Delta n1}\varphi(x, \lambda_{\Delta n}) + r_{\Delta n2}\theta(x, \lambda_{\Delta n})) dx \right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(r_{\Delta n1} \int_{\Delta} f(x) \varphi(x, \lambda_{\Delta n}) dx \right. \\ &\quad \left. + r_{\Delta n2} \int_{\Delta} f(x) \theta(x, \lambda_{\Delta n}) dx \right) \left(r_{\Delta n1} \int_{\Delta} \overline{f(x)} \varphi(x, \lambda_{\Delta n}) dx \right. \\ &\quad \left. + r_{\Delta n2} \int_{\Delta} \overline{f(x)} \theta(x, \lambda_{\Delta n}) dx \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (r_{\Delta n1}^2 g_{\Delta 1}(\lambda_{\Delta n}) \overline{g_{\Delta 1}(\lambda_{\Delta n})} + r_{\Delta n1} g_{\Delta 1}(\lambda_{\Delta n}) r_{\Delta n2} \overline{g_{\Delta 2}(\lambda_{\Delta n})} \\ &\quad + r_{\Delta n1} \overline{g_{\Delta 1}(\lambda_{\Delta n})} r_{\Delta n2} g_{\Delta 2}(\lambda_{\Delta n}) + r_{\Delta n2}^2 g_{\Delta 2}(\lambda_{\Delta n}) \overline{g_{\Delta 2}(\lambda_{\Delta n})}), \end{aligned}$$

其中,

$$g_{\Delta 1}(\lambda) = \int_{\Delta} f(x) \varphi(x, \lambda) dx, \quad g_{\Delta 2}(\lambda) = \int_{\Delta} f(x) \theta(x, \lambda) dx,$$

这样

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |g_{\Delta 1}(\lambda)|^2 d\rho_{\Delta 11}(\lambda) + g_{\Delta 1}(\lambda) \overline{g_{\Delta 2}(\lambda)} d\rho_{\Delta 21}(\lambda) \\ &\quad + \overline{g_{\Delta 1}(\lambda)} g_{\Delta 2}(\lambda) d\rho_{\Delta 12}(\lambda) + |g_{\Delta 2}(\lambda)|^2 d\rho_{\Delta 22}(\lambda). \end{aligned}$$

这里 $\rho_{\Delta jk}$ 都是 $(-\infty, \infty)$ 上的阶梯函数, 其间断点为 $\lambda_{\Delta n}$, 跃度是

$$\rho_{\Delta jk}(\lambda_{\Delta n} + 0) - \rho_{\Delta jk}(\lambda_{\Delta n} - 0) = \sum_{\{m | \lambda_{\Delta m} = \lambda_{\Delta n}\}} r_{\Delta m j} r_{\Delta m k}$$

($\lambda_{\Delta n}$ 可以是若干重数的!).

注 $\rho_{\Delta} = \begin{pmatrix} \rho_{\Delta 11} & \rho_{\Delta 12} \\ \rho_{\Delta 21} & \rho_{\Delta 22} \end{pmatrix}$ 产生一个测度,

$$L^2(\rho_{\Delta}) = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \left| \|g\|^2 = (g, g)_{\rho_{\Delta}} = \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{g_1}, \overline{g_2}) \begin{pmatrix} d\rho_{\Delta 11} & d\rho_{\Delta 12} \\ d\rho_{\Delta 21} & d\rho_{\Delta 22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} < \infty \right\},$$

$$f \in L^2(\Delta) \xrightarrow{\sigma} \begin{pmatrix} g_{\Delta 1} \\ g_{\Delta 2} \end{pmatrix} \in L^2(\rho_{\Delta}),$$

σ 是等距线性算子! 其中,

$$g_{\Delta 1}(\lambda) = \int_{\Delta} f(x) \varphi(x, \lambda) dx, \quad g_{\Delta 2}(\lambda) = \int_{\Delta} f(x) \theta(x, \lambda) dx.$$

这样得到的矩阵

$$\rho_{\Delta} = \begin{pmatrix} \rho_{\Delta 11} & \rho_{\Delta 12} \\ \rho_{\Delta 21} & \rho_{\Delta 22} \end{pmatrix}$$

称为 T_{Δ} 的谱矩阵. 可以利用下面的条件将 ρ_{Δ} 标准化

$$\rho_{\Delta}(0) = 0, \quad \rho_{\Delta}(a+0) = \rho_{\Delta}(\lambda).$$

谱矩阵 ρ_{Δ} 有下列性质:

- (1) ρ_{Δ} 是 Hermite 矩阵 (实际上它是对称矩阵, 因为 $\rho_{\Delta 21} = \rho_{\Delta 12}$);
- (2) 在任何有限区间上, $\rho_{\Delta jk}$ 都是有界变差的 (即局部有界变差, 因为 $\rho_{\Delta jk}$ 是阶梯函数);
- (3) 如果 $\delta = (\mu, \nu]$, $\mu < \nu$, 则 $\rho_{\Delta}(\delta) = \rho_{\Delta}(\nu) - \rho_{\Delta}(\mu)$ 是非负定的.

$$\begin{aligned} \rho_{\Delta}(\delta) &= (\rho_{\Delta jk}(\nu) - \rho_{\Delta jk}(\mu))_{1 \leq j, k \leq 2} \\ &= \left(\sum_{\mu < \lambda_{\Delta m} \leq \nu} r_{\Delta m j} \cdot r_{\Delta m k} \right)_{1 \leq j, k \leq 2} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{(\mu, \nu]} r_{\Delta m 1}^2 & \sum_{(\mu, \nu]} r_{\Delta m 1} r_{\Delta m 2} \\ \sum_{(\mu, \nu]} r_{\Delta m 1} r_{\Delta m 2} & \sum_{(\mu, \nu]} r_{\Delta m 2}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{(\mu, \nu]} r_{\Delta m 1}^2 \geq 0,$$

$$\left(\sum_{(\mu, \nu]} r_{\Delta m 1} r_{\Delta m 2} \right)^2 \leq \sum_{(\mu, \nu]} r_{\Delta m 1}^2 \cdot \sum_{(\mu, \nu]} r_{\Delta m 2}^2,$$

所以 $\rho_{\Delta}(\delta)$ 是非负定的.

以上是有限区间上特征展开的新的表述. 要利用这种形式取极限, 让 $\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)$, 来得到 $(-\infty, \infty)$ 情形下的特征展开. 为了能得到谱矩阵 $\rho = \lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \rho_{\Delta}$. 仿照 3.7 节的证明, 需要得到类似于 Levinson 引理的结论, 将 ρ_{Δ} 与有限区间上的 Weyl 函数联系起来 $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_b(\lambda)}{|\mu - \lambda|^2} = \frac{\operatorname{Im} m_b(\mu)}{\operatorname{Im} \mu} \right)$.

记 $y_1(x, z) = \varphi(x, z) + m_a(z)\theta(x, z)$, 它是微分方程 $My = zy$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ 满足 a 点与 z 无关的边条件

$$\cos \beta y_1(a) + \sin \beta p(a) y_1'(a) = 0, \quad 0 \leq \beta < \pi$$

($y_1(a) = \sin \beta, p(a) y_1'(a) = -\cos \beta$, 与 z 无关!) 的解, 显然

$$\begin{aligned} m_a(z) &= -\frac{\cos \beta \varphi(a, z) + \sin \beta p(a) \varphi'(a, z)}{\cos \beta \theta(a, z) + \sin \beta p(a) \theta'(a, z)} \\ &= -\frac{\cot \beta \varphi(a, z) + p(a) \varphi'(a, z)}{\cot \beta \theta(a, z) + p(a) \theta'(a, z)} \in C_a, \quad [y_1, y_1](a) = 0. \end{aligned}$$

类似地, $y_2(x, z) = \varphi(x, z) + m_b(z)\theta(x, z)$ 是微分方程 $My = zy$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ 满足 b 点与 z 无关的边条件

$$\cos \gamma y_2(b) + \sin \gamma p(b) y_2'(b) = 0, \quad 0 \leq \gamma < \pi$$

($y_2(b) = \sin \gamma, p(b) y_2'(b) = -\cos \gamma$, 与 z 无关!) 的解,

$$\begin{aligned} m_b(z) &= -\frac{\cos \gamma \varphi(b, z) + \sin \gamma p(b) \varphi'(b, z)}{\cos \gamma \theta(b, z) + \sin \gamma p(b) \theta'(b, z)} \\ &= -\frac{\cot \gamma \varphi(b, z) + p(b) \varphi'(b, z)}{\cot \gamma \theta(b, z) + p(b) \theta'(b, z)} \in C_b, \quad [y_2, y_2](b) = 0. \end{aligned}$$

由于 $\operatorname{Im} z \neq 0$, z 不是 T_{Δ} 的特征值, 所以 y_1, y_2 线性无关. 于是 $m_b(z) \neq m_a(z)$. 考虑边值问题

$$\begin{cases} zy - My = f, & f \in L^2(\Delta), \\ l_1(y) \equiv \cos \beta y(a) + \sin \beta p(a) y'(a) = 0, \\ l_2(y) \equiv \cos \gamma y(b) + \sin \gamma p(b) y'(b) = 0 \end{cases}$$

的解, 由于 $z \in \rho(T_\Delta)$, 所以对任意的 $f \in L^2(\Delta)$, 这个问题的解存在且唯一. 设 y_0 是非齐次微分方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} zy - My = f, \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

的解, 则

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_0.$$

先用常数变易法求出 y_0 , 然后再来确定常数 c_1, c_2 . 设

$$y_0 = Ay_1 + By_2,$$

则

$$\begin{aligned} y'_0 &= Ay'_1 + By'_2, \quad A'y_1 + B'y_2 = 0, \\ (py'_0)' &= A(py'_1)' + B(py'_2)' + A'py'_1 + B'py'_2. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f &= zy_0 - My_0 = zy_0 + (py'_0)' - qy_0 \\ &= z(Ay_1 + By_2) + A(py'_1)' + B(py'_2)' + A'py'_1 + B'py'_2 - q(Ay_1 + By_2) \\ &= A'py'_1 + B'py'_2. \end{aligned}$$

这样得到方程组

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0, \\ A'py'_1 + B'py'_2 = f, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & py'_2 \end{vmatrix}}{p(y_1 y'_2 - y'_1 y_2)} = -\frac{f y_2}{\omega(z)}, \\ B' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ py'_1 & f \end{vmatrix}}{p(y_1 y'_2 - y'_1 y_2)} = \frac{f y_1}{\omega(z)} \end{cases}$$

(由 Liouville 公式得 $p(x)W(y_1, y_2)(x) = \text{const} \neq 0$, 所以

$$\begin{aligned} \text{const} &= p(0)W(y_1, y_2)(0) = p(0) \begin{vmatrix} \varphi(0, z) + m_a(z)\theta(0, z) & \varphi(0, z) + m_b(z)\theta(0, z) \\ \varphi'(0, z) + m_a(z)\theta'(0, z) & \varphi'(0, z) + m_b(z)\theta'(0, z) \end{vmatrix} \\ &= m_b(z) - m_a(z) = \omega(z). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases} A = \int_0^x -\frac{f(t)y_2(t)}{\omega(z)}dt + \tilde{A}, \\ B = \int_0^x \frac{f(t)y_1(t)}{\omega(z)}dt + \tilde{B}, \end{cases}$$

而

$$y_0 = \tilde{A}y_1 + \tilde{B}y_2 + \int_0^x \frac{f(t)}{\omega(z)} (-y_1(x)y_2(t) + y_1(t)y_2(x)) dt.$$

由条件 $y_0(0) = y'_0(0) = 0$ 得

$$\begin{cases} \tilde{A}y_1(0) + \tilde{B}y_2(0) = 0, \\ \tilde{A}y'_1(0) + \tilde{B}y'_2(0) = 0. \end{cases}$$

由于 y_1, y_2 线性无关, 故 $\tilde{A} = \tilde{B} = 0$. 所以

$$y_0 = \int_0^x \frac{f(t)}{\omega(z)} (y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)) dt.$$

下面来定常数 c_1, c_2 .

$$\begin{cases} 0 = l_1(y) = c_1l_1(y_1) + c_2l_1(y_2) + l_1(y_0) = c_2l_1(y_2) + l_1(y_0), \\ 0 = l_2(y) = c_1l_2(y_1) + l_2(y_0). \end{cases}$$

可是

$$\begin{aligned} l_1(y_2) &= \cos \beta y_2(a) + \sin \beta p(a)y'_2(a) = \begin{vmatrix} \sin \beta & y_2(a) \\ -\cos \beta & p(a)y'_2(a) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ p(a)y'_1(a) & p(a)y'_2(a) \end{vmatrix} = p(a)W(y_1, y_2)(a) = \omega(z), \end{aligned}$$

同样,

$$l_2(y_1) = \cos \gamma y_1(b) + \sin \gamma p(b)y'_1(b) = p(b)W(y_1, y_2)(b) = \omega(z).$$

因此从

$$\begin{aligned} 0 &= c_2\omega(z) + \cos \beta \int_0^a \frac{f(t)}{\omega(z)} (y_1(t)y_2(a) - y_1(a)y_2(t)) dt \\ &\quad + \sin \beta p(a) \int_0^a \frac{f(t)}{\omega(z)} (y_1(t)y'_2(a) - y'_1(a)y_1(t)) dt \\ &= c_2\omega(z) + \int_0^a \frac{f(t)}{\omega(z)} \left(y_1(t) (\cos \beta y_2(a) + \sin \beta p(a)y'_2(a)) \right. \\ &\quad \left. - y_2(t) (\cos \beta y_1(a) + \sin \beta p(a)y'_1(a)) \right) dt \\ &= c_2\omega(z) + \int_0^a f(t)y_1(t) dt = c_2\omega(z) - \int_a^0 f(t)y_1(t) dt, \end{aligned}$$

$$0 = c_1 \omega(z) - \int_0^b f(t) y_2(t) dt,$$

可以解得

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{\omega(z)} \int_0^b f(t) y_2(t) dt, \\ c_2 = \frac{1}{\omega(z)} \int_a^0 f(t) y_1(t) dt. \end{cases}$$

这样便得出

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_0 \\ &= \frac{1}{\omega(z)} \int_0^b f(t) y_1(x) y_2(t) dt + \frac{1}{\omega(z)} \int_a^0 f(t) y_1(t) y_2(x) dt \\ &\quad + \frac{1}{\omega(z)} \int_0^x f(t) (y_1(t) y_2(x) - y_1(x) y_2(t)) dt \\ &\quad + \frac{1}{\omega(z)} \int_a^x f(t) y_1(t) y_2(x) dt + \frac{1}{\omega(z)} \int_x^b f(t) y_1(x) y_2(t) dt \\ &\quad + \int_a^b G_{\Delta}(x, t, z) f(t) dt. \end{aligned}$$

其中,

$$G_{\Delta}(x, t, z) = \begin{cases} \frac{y_1(t) y_2(x)}{\omega(z)}, & t \leq x, \\ \frac{y_1(x) y_2(t)}{\omega(z)}, & t > x \end{cases}$$

称为 Δ 上边值问题

$$\begin{cases} zy - My = f, \\ l_1(y) = l_2(y) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数. 实际上, 它是豫解算子 $(zI - T_{\Delta})^{-1}$, $\text{Im} z \neq 0$ 的积分核.

$$\begin{aligned} G_{\Delta}(x, 0, z) &= \begin{cases} \frac{y_1(0) y_2(x)}{m_b(z) - m_a(z)}, & 0 \leq x, \\ \frac{y_1(x) y_2(0)}{m_b(z) - m_a(z)}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{y_2(x)}{m_b(z) - m_a(z)}, & x \geq 0, \\ \frac{y_1(x)}{m_b(z) - m_a(z)}, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

可是由 Green 公式, 一方面

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta} M G_{\Delta}(x, 0, z) \cdot \overline{G_{\Delta}(x, 0, z)} dx - \int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) \cdot \overline{M G_{\Delta}(x, 0, z)} dx \\ &= (z - \bar{z}) \int_{\Delta} |G_{\Delta}(x, 0, z)|^2 dx = 2i \operatorname{Im} z \int_{\Delta} |G_{\Delta}(x, 0, z)|^2 dx. \end{aligned}$$

另一方面它又等于^①

$$\begin{aligned} [G_{\Delta}(\cdot, 0, z), G_{\Delta}(\cdot, 0, z)]_a^b &= \frac{1}{|m_b(z) - m_a(z)|^2} ([y_1, y_1]_a^0 + [y_2, y_2]_0^b) \\ &= \frac{1}{|m_b(z) - m_a(z)|^2} (-[y_2, y_2](0) + [y_1, y_1](0)), \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} [y_2, y_2](0) &= [\varphi + m_b(z)\theta, \varphi + m_b(z)\theta](0) = m_b(z)[\theta, \varphi](0) + \overline{m_b(z)}[\varphi, \theta](0) \\ &= -m_b(z)\overline{[\varphi, \theta](0)} + \overline{m_b(z)}[\varphi, \theta](0), \\ &= \overline{m_b(z)} - m_b(z) = -2i \operatorname{Im} m_b(z), \\ [y_1, y_1](0) &= -2i \operatorname{Im} m_a(z), \end{aligned}$$

于是

$$\int_{\Delta} |G_{\Delta}(x, 0, z)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im}(-m_a(z) + m_b(z))}{\operatorname{Im} z |m_b(z) - m_a(z)|^2} - \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{1}{-m_b(z) + m_a(z)}\right)}{\operatorname{Im} z},$$

由 Parseval 等式,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} |G_{\Delta}(x, 0, z)|^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) h_{\Delta n}(x) dx \right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) h_{\Delta n}(x) dx \int_{\Delta} \overline{G_{\Delta}(x, 0, z)} h_{\Delta n}(x) dx, \end{aligned}$$

看右边的和数 ($h_{\Delta n}$ 是实的!)

$$\int_{\Delta} M G_{\Delta}(x, 0, z) h_{\Delta n}(x) dx - \int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) M h_{\Delta n}(x) dx = [G_{\Delta}(\cdot, 0, z), h_{\Delta n}]_a^b.$$

即

$$\begin{aligned} (z - \lambda_{\Delta n}) \int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) h_{\Delta n}(x) dx &= [G_{\Delta}(\cdot, 0, z), h_{\Delta n}]_a^b \\ &= \frac{1}{m_b(z) - m_a(z)} ([y_2, h_{\Delta n}]_0^b + [y_1, h_{\Delta n}]_a^0). \end{aligned}$$

^① 注意: y_2 是复的, y_2 与 \bar{y}_2 不一定相关, $W(y_2, \bar{y}_2)$ 要计算! y_1 在 a , y_2 在 b 的初值与 z 无关! 是实的, 所以

$$[y_1, y_1](a) = [y_2, y_2](b) = 0.$$

由于 $h_{\Delta n}$ 是实的且满足 a 和 b 点边条件, 故

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{1}{m_b(z) - m_a(z)} ([y_1, h_{\Delta n}](0) - [y_2, h_{\Delta n}](0)) \\ &= \frac{1}{m_b(z) - m_a(z)} ([y_1 - y_2, h_{\Delta n}](0)) \\ &= \frac{1}{m_b(z) - m_a(z)} [(m_a(z) - m_b(z)) \theta(\cdot, z), r_{\Delta n 1} \varphi(\cdot, \lambda_{\Delta n}) + r_{\Delta n 2} \theta(\cdot, \lambda_{\Delta n})](0) \\ &= -r_{\Delta n 1} [\theta(\cdot, z), \varphi(\cdot, \lambda_{\Delta n})](0) (\text{在 } 0 \text{ 点 } \theta \text{ 满足的初值与 } z \text{ 无关!}) = r_{\Delta n 1}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) h_{\Delta n}(x) dx &= \frac{r_{\Delta n 1}}{z - \lambda_{\Delta n}}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{r_{\Delta n 1}}{z - \lambda_{\Delta n}} \right|^2 &= \frac{\operatorname{Im} \left(\frac{1}{-m_b(z) + m_a(z)} \right)}{\operatorname{Im} z}. \end{aligned}$$

记

$$M_{\Delta 11}(z) = \frac{1}{-m_b(z) + m_a(z)},$$

则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda - z|^2} d\rho_{\Delta 11}(\lambda) = \frac{\operatorname{Im} M_{\Delta 11}(z)}{\operatorname{Im} z}.$$

类似地, 得出其余 3 个等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z) &= \begin{cases} \frac{y_1'(0)y_2(x)}{\omega(z)}, & x \geq 0, \\ \frac{y_1(x)y_2'(0)}{\omega(z)}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{m_a(z)y_2(x)}{p(0)(m_b(z) - m_a(z))}, & x \geq 0, \\ \frac{m_b(z)y_1(x)}{p(0)(m_b(z) - m_a(z))}, & x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

由广义的 Parseval 等式,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) \overline{\frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z)} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) h_{\Delta n}(x) dx \\ &\quad \cdot \overline{\int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z) h_{\Delta n}(x) dx}, \end{aligned}$$

根据 Green 公式, 由

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta} M G_{\Delta}(x, 0, z) \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z)} dx - \int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) \cdot M \overline{\frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z)} dx \\ &= (z - \bar{z}) \int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z)} dx \\ &= 2i \operatorname{Im} z \int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z)} dx, \end{aligned}$$

而 (分别在 $[a, 0]$ 和 $[0, b]$ 上用 Green 公式)

$$\begin{aligned} & \left[G_{\Delta}(\cdot, 0, z), \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(\cdot, 0, z) \right]_a^b \\ &= \left[G_{\Delta}(\cdot, 0, z), \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(\cdot, 0, z) \right]_a^0 + \left[G_{\Delta}(\cdot, 0, z), \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(\cdot, 0, z) \right]_0^b \\ &= \frac{\overline{m_b(z)}}{p(0) |m_b(z) - m_a(z)|^2} [y_1, y_1](0) - \frac{\overline{m_a(z)}}{p(0) |m_b(z) - m_a(z)|^2} [y_2, y_2](0) \\ &= \frac{1}{p(0) |m_b(z) - m_a(z)|^2} \left(-2i \overline{m_b(z)} \operatorname{Im} m_a(z) + 2i \overline{m_a(z)} \operatorname{Im} m_b(z) \right). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) \overline{\frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z)} dx &= \frac{-\overline{m_b(z)} \operatorname{Im} m_a(z) + \overline{m_a(z)} \operatorname{Im} m_b(z)}{\operatorname{Im} z p(0) |m_b(z) - m_a(z)|^2} \\ &= \frac{1}{p(0)} \frac{\operatorname{Im} \frac{1}{2} \frac{m_b(z) + m_a(z)}{-\overline{m_b(z)} + m_a(z)}}{\operatorname{Im} z}, \end{aligned}$$

因为

$$\int_{\Delta} G_{\Delta}(x, 0, z) h_{\Delta n}(x) dx = \frac{r_{\Delta n 1}}{z - \lambda_{\Delta n}},$$

另外从

$$\int_{\Delta} \left(M \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z) \cdot h_{\Delta n} - \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z) \cdot M h_{\Delta n} \right) dx - \left[\frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(\cdot, 0, z), h_{\Delta n} \right]_a^b,$$

即

$$\begin{aligned} (z - \lambda_{\Delta n}) \int_{\Delta} \frac{\partial G_{\Delta}(x, 0, z)}{\partial t} h_{\Delta n}(x) dx &= \left[\frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(\cdot, 0, z), h_{\Delta n} \right]_a^b \\ &= \frac{m_b(z)}{p(0) (m_b(z) - m_a(z))} [y_1, h_{\Delta n}]_a^0 \\ &\quad + \frac{m_a(z)}{p(0) (m_b(z) - m_a(z))} [y_2, h_{\Delta n}]_0^b. \end{aligned}$$

因为 $h_{\Delta n}$ 满足 a 和 b 点的边条件,

$$\begin{aligned}
 \text{上式} &= \frac{m_b(z)}{p(0)(m_b(z) - m_a(z))} [y_1, h_{\Delta n}](0) - \frac{m_a(z)}{p(0)(m_b(z) - m_a(z))} [y_2, h_{\Delta n}](0) \\
 &= \frac{m_b(z)}{p(0)(m_b(z) - m_a(z))} [\varphi(\cdot, z) + m_a(z)\theta(\cdot, z), r_{\Delta n1}\varphi(\cdot, \lambda_{\Delta n}) \\
 &\quad + r_{\Delta n2}\theta(\cdot, \lambda_{\Delta n})](0) - \frac{m_a(z)}{p(0)(m_b(z) - m_a(z))} [\varphi(\cdot, z) \\
 &\quad + m_b(z)\theta(\cdot, z), r_{\Delta n1}\varphi(\cdot, \lambda_{\Delta n}) + r_{\Delta n2}\theta(\cdot, \lambda_{\Delta n})](0) \\
 &= \frac{m_b(z)(r_{\Delta n2} - m_a(z)r_{\Delta n1})}{p(0)(m_b(z) - m_a(z))} - \frac{m_a(z)(r_{\Delta n2} - m_b(z)r_{\Delta n1})}{p(0)(m_b(z) - m_a(z))} \\
 &= \frac{r_{\Delta n2}}{p(0)}.
 \end{aligned}$$

于是

$$\int_{\Delta} \overline{\frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z)} h_{\Delta n}(x) dx = \frac{r_{\Delta n2}}{\bar{z} - \lambda_{\Delta n}} \cdot \frac{1}{p(0)},$$

这样便得

$$\frac{1}{p(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{\Delta n1} r_{\Delta n2}}{|z - \lambda_{\Delta n}|^2} = \frac{1}{p(0)} \frac{\operatorname{Im} \frac{1}{2} \left(\frac{m_b(z) + m_a(z)}{-m_b(z) + m_a(z)} \right)}{\operatorname{Im} z}.$$

记

$$M_{\Delta 12}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{m_b(z) + m_a(z)}{-m_b(z) + m_a(z)} \right),$$

则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z - \lambda|^2} d\rho_{\Delta 12}(\lambda) = \frac{\operatorname{Im} M_{\Delta 12}(z)}{\operatorname{Im} z}.$$

同样,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z - \lambda|^2} d\rho_{\Delta 21}(\lambda) = \frac{\operatorname{Im} M_{\Delta 12}(z)}{\operatorname{Im} z} = \frac{\operatorname{Im} M_{\Delta 21}(z)}{\operatorname{Im} z},$$

$$M_{\Delta 12}(z) = M_{\Delta 21}(z),$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z) \overline{\frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z)} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z) h_{\Delta n}(x) dx \\
 &\quad \cdot \overline{\int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z) h_{\Delta n}(x) dx},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta} M \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z) \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z)} dx - \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z) \cdot \overline{M \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z)} dx \\
&= (z - \bar{z}) \int_{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z) \right|^2 dx \\
&= 2i \operatorname{Im} z \int_{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z) \right|^2 dx, \\
& \left[\frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(\cdot, 0, z), \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(\cdot, 0, z) \right]_a^b \\
&= \frac{|m_b(z)|^2}{p^2(0) |m_b(z) - m_a(z)|^2} [y_1, y_1](0) - \frac{|m_a(z)|^2}{p^2(0) |m_b(z) - m_a(z)|^2} [y_2, y_2](0) \\
& \quad - \frac{1}{p^2(0) |m_b(z) - m_a(z)|^2} 2i \left(|m_b(z)|^2 \operatorname{Im} m_a(z) + |m_a(z)|^2 \operatorname{Im} m_b(z) \right),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial t} G_{\Delta}(x, 0, z) \right|^2 dx &= \frac{1}{p^2(0)} \left(\frac{|m_b(z)|^2 \operatorname{Im} m_a(z) + |m_a(z)|^2 \operatorname{Im} m_b(z)}{\operatorname{Im} z |m_b(z) - m_a(z)|^2} \right) \\
&= \frac{1}{p^2(0)} \left(\frac{\operatorname{Im} \left(\frac{m_a(z) m_b(z)}{-m_b(z) + m_a(z)} \right)}{\operatorname{Im} z} \right),
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^2(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{\Delta n 2}^2}{|z - \lambda_{\Delta n}|^2} &= \frac{1}{p^2(0)} \left(\frac{\operatorname{Im} \left(\frac{m_a(z) m_b(z)}{-m_b(z) + m_a(z)} \right)}{\operatorname{Im} z} \right). \\
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z - \lambda|^2} d\rho_{\Delta 22}(\lambda) &= \frac{\operatorname{Im} M_{\Delta 22}}{\operatorname{Im} z}.
\end{aligned}$$

其中,

$$M_{\Delta 22}(z) = \frac{m_a(z) m_b(z)}{-m_b(z) + m_a(z)}.$$

总结以上讨论, 有

引理 3.11.3 设 $\operatorname{Im} z \neq 0$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z - \lambda|^2} d\rho_{\Delta jk}(\lambda) = \frac{\operatorname{Im} M_{\Delta jk}(z)}{\operatorname{Im} z}, \quad j, k = 1, 2,$$

其中,

$$M_{\Delta 11}(z) = \frac{1}{-m_b(z) + m_a(z)},$$

$$M_{\Delta 12}(z) = M_{\Delta 21}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{m_b(z) + m_a(z)}{-m_b(z) + m_a(z)} \right),$$

$$M_{\Delta 22}(z) = \frac{m_b(z)m_a(z)}{-m_b(z) + m_a(z)}.$$

引理 3.11.4 (推广的 Helly 选择定理) 设 $\{\sigma_n(\lambda)\}$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的局部有界变差函数序列, 如果存在正函数 $F(\lambda)$, 使得

$$|\sigma_n(\lambda)| \leq F(\lambda), \quad \lambda \in (-\infty, \infty), n = 1, 2, \dots$$

且

$$\pi_n(\lambda) = \bigvee_0^\lambda \sigma_n \leq F(\lambda), \quad \lambda \in (-\infty, \infty), n = 1, 2, \dots,$$

则存在点点收敛的子序列 $\{\sigma_{n_k}(\lambda)\}$, 极限函数 $\sigma(\lambda)$ 也是局部有界变差的.

证明 令

$$\nu_n(\lambda) = \pi_n(\lambda) - \sigma_n(\lambda),$$

则由那汤松《实变函数论》Chap.8 §3 定理 6, $\pi_n(\lambda)$ 与 $\nu_n(\lambda)$ 都是单调增加的函数.

$$\sigma_n(\lambda) = \pi_n(\lambda) - \nu_n(\lambda),$$

$$|\pi_n(\lambda)| \leq F(\lambda),$$

$$|\nu_n(\lambda)| \leq 2F(\lambda),$$

利用 Helly 定理, 存在子序列 $\{\pi_{n_k}(\lambda)\}$ 和 $\{\nu_{n_k}(\lambda)\}$, 使得

$$\pi(\lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n_k}(\lambda),$$

$$\nu(\lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{n_k}(\lambda)$$

且 $\pi(\lambda), \nu(\lambda)$ 都是非降的. 于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{n_k}(\lambda) = \pi(\lambda) - \nu(\lambda) = \sigma(\lambda).$$

由那汤松《实变函数论》Chap.8 §3 定理 1 与定理 3, $\sigma(\lambda)$ 是局部有界变差函数.

定理 3.11.2 如果 M 属于情形 IV (即 $-\infty$ 和 ∞ 都是极限点), 记

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} m_a(z) = M_-(z), \quad \lim_{b \rightarrow \infty} m_b(z) = M_+(z),$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} M_{\Delta jk}(z) = M_{jk}(z), \quad j, k = 1, 2,$$

$$M_{11}(z) = \frac{1}{-M_+(z) + M_-(z)},$$

$$M_{12}(z) = M_{21}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{M_+(z) + M_-(z)}{-M_+(z) + M_-(z)} \right),$$

$$M_{22}(z) = \frac{M_+(z)M_-(z)}{-M_+(z) + M_-(z)},$$

则存在唯一的实对称谱矩阵

$$\rho(\lambda) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(\lambda) & \rho_{12}(\lambda) \\ \rho_{21}(\lambda) & \rho_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

满足 (1) $\Delta = (\lambda, \mu]$, $\rho(\Delta)$ 是非负定的;

(2) ρ_{jk} 局部有界变差;

(3) 在 ρ_{jk} 的连续点 λ, μ ,

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} (\rho_{\Delta jk}(\mu) - \rho_{\Delta jk}(\lambda)) = \rho_{jk}(\mu) - \rho_{jk}(\lambda)$$

且有

$$\rho_{jk}(\mu) - \rho_{jk}(\lambda) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\mu} \operatorname{Im} M_{jk}(\varepsilon + i\delta) d\varepsilon.$$

证明

$$\int_0^a |y_1(x, z)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} m_a(z)}{\operatorname{Im} z} \quad (\text{因为 } m_a(z) \in C_a),$$

$$\int_0^b |y_2(x, z)|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} m_b(z)}{\operatorname{Im} z} \quad (\text{因为 } m_b(z) \in C_b),$$

所以 $\operatorname{Im} m_a(z)$ 与 $\operatorname{Im} m_b(z)$ 反号, 即 $m_a(z)$ 与 $m_b(z)$ 在不同的两个半平面上, 在实轴的两侧. 取 $z = i$,

$$m_a(i) \in C_{-1}(i), \quad a < -1,$$

$$m_b(i) \in C_1(i), \quad b > 1,$$

$C_{-1}(i)$ 与 $C_1(i)$ 有正距离 d . 故

$$|m_b(i) - m_a(i)| \geq d > 0, \quad a < -1, b > 1.$$

当 $a < -1, b > 1$ 时, $m_a(i)$ 关于 a , $m_b(i)$ 关于 b 有界, 故 $M_{\Delta 11}(i), M_{\Delta 12}(i), M_{\Delta 22}(i)$ 关于 $a < -1, b > 1$ 是有界的. 这样, 当 $a < -1, b > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|i - \lambda|^2} d\rho_{\Delta jk}(\lambda) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda^2} d\rho_{\Delta jk}(\lambda) \right| = \left| \frac{\operatorname{Im} M_{\Delta jk}(i)}{\operatorname{Im} i} \right| \\ &= |\operatorname{Im} M_{\Delta jk}(i)| < K, \end{aligned}$$

对任何 $\nu > 0$, 当 $j = k = 1$ 或 $j = k = 2$ 时, 因为 $\rho_{\Delta 11}(\lambda)$ 与 $\rho_{\Delta 22}(\lambda)$ 非降, 有

$$\int_0^{\nu} \frac{1}{1 + \lambda^2} d\rho_{\Delta jk}(\lambda) < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda^2} d\rho_{\Delta jk}(\lambda) < K,$$

$$\frac{1}{1 + \nu^2} \int_0^{\nu} d\rho_{\Delta jk}(\lambda) = \frac{1}{1 + \nu^2} \rho_{\Delta jk}(\nu) < K,$$

所以

$$\rho_{\Delta_{jk}}(\nu) < K(1 + \nu^2).$$

同样地

$$\int_{-\nu}^0 \frac{1}{1 + \lambda^2} d\rho_{\Delta_{jk}}(\lambda) < K,$$

$$\frac{1}{1 + \nu^2} \int_{-\nu}^0 d\rho_{\Delta_{jk}}(\lambda) = -\frac{1}{1 + \nu^2} \rho_{\Delta_{jk}}(-\nu) < K,$$

所以

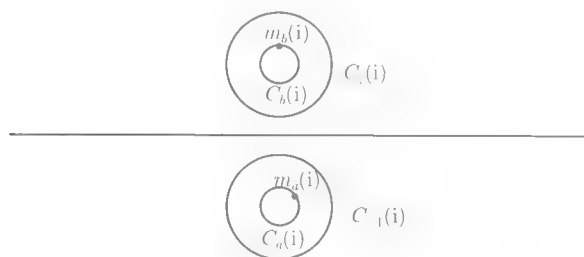


图 3.14

$$|\rho_{\Delta_{jk}}(-\nu)| < K(1 + \nu^2) \quad \rho_{\Delta_{jk}}(-\nu) \text{ 是负的!}$$

当 $j \neq k$ 时, $\rho_{\Delta_{jk}}(\lambda)$ 是阶梯函数, 但不一定单调, 在 $\lambda > 0$ 时,

$$\begin{aligned} |\rho_{\Delta_{12}}(\lambda)| &= \left| \sum_{0 < \lambda_{\Delta n} \leq \lambda} r_{\Delta n 1} r_{\Delta n 2} \right| \leq \sum_{0 < \lambda_{\Delta n} \leq \lambda} |r_{\Delta n 1}| |r_{\Delta n 2}| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{0 < \lambda_{\Delta n} \leq \lambda} (r_{\Delta n 1}^2 + r_{\Delta n 2}^2) \\ &= \frac{1}{2} (\rho_{\Delta_{11}} + \rho_{\Delta_{22}}) < K(1 + \lambda^2). \end{aligned}$$

当 $\lambda < 0$ 时也一样, 所以

$$|\rho_{\Delta_{12}}(\lambda)|, |\rho_{\Delta_{21}}(\lambda)| < K(1 + \lambda^2),$$

这样由引理 3.11.4, 存在收敛的子列, 使得极限

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\Delta_k 11}(\lambda) &= \rho_{11}(\lambda), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\Delta_k 12}(\lambda) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\Delta_k 21}(\lambda) = \rho_{12}(\lambda) = \rho_{21}(\lambda), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = (-\infty, \infty), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\Delta_k 22}(\lambda) &= \rho_{22}(\lambda) \end{aligned}$$

存在, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\Delta_k} = \rho.$$

显然 ρ 也具有 ρ_{Δ} 所具有的那 3 条性质.

剩下来证明 Titchmarsh 型公式. 当 $j = k$ 时, $\rho_{\Delta 11}(\lambda), \rho_{\Delta 22}(\lambda)$ 是非降的. 其证明与 3.7 节里的一样. 对 $j \neq k$, 需要引用下述定理 (cf. 那汤松《实变函数论》Chap.8 定理 3.7.3):

设 (1) $\{\rho_n(\lambda)\}$ 是 $[a, b]$ 上的有界变差函数序列, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(\lambda) = \rho(\lambda)$;

(2) $\bigvee_a^b \rho_n \leq K$;

(3) $\varphi \in C[a, b]$,

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(\lambda) d\rho_n(\lambda) = \int_a^b \varphi(\lambda) d\rho(\lambda).$$

至于 Titchmarsh 型公式的证明则与 3.7 节的相同.

同样地, 可得 M 属于情形 I~情形 III 的定理. 例如,

定理 3.11.3 如果 M 属于情形 I, $\text{Im} z_0 \neq 0$, 取 $\hat{m}_{-\infty}(z_0) \in C_{-\infty}(z_0), \hat{m}_{\infty}(z_0) \in C_{\infty}(z_0), M_{-}(z, \hat{m}_{-\infty}(z_0))$ 和 $M_{+}(z, \hat{m}_{\infty}(z_0))$ 是对应的 Weyl 函数, 则

$$M_{11}(z) = \frac{1}{-M_{+}(z, \hat{m}_{\infty}(z_0)) + M_{-}(z, \hat{m}_{-\infty}(z_0))},$$

$$M_{12}(z) = M_{21}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{+} + M_{-}}{-M_{+} + M_{-}} \right),$$

$$M_{22}(z) = \frac{M_{+} M_{-}}{-M_{+} + M_{-}}$$

是全平面的半纯函数, 存在实对称谱矩阵 (依赖于 $\hat{m}_{-\infty}(z_0), \hat{m}_{\infty}(z_0)$ 的选取!)

$$\rho(\lambda) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(\lambda) & \rho_{12}(\lambda) \\ \rho_{21}(\lambda) & \rho_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

满足

(1) $\Delta = (\lambda, \mu], \rho(\Delta)$ 非负定;

(2) ρ_{jk} 局部有界变差;

(3) 在 ρ_{jk} 的连续点 λ, μ 处, 有

$$\rho_{jk}(\mu) - \rho_{jk}(\lambda) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\mu} \text{Im} M_{jk}(\varepsilon + i\delta) d\varepsilon.$$

但是在这些情形下, 谱矩阵并不唯一, 随着 $\hat{m}_{-\infty}(z_0), \hat{m}_{\infty}(z_0)$ 的选取不同而不同, 这意味着在 $\pm\infty$ 所加的边条件不同, 得到的 $T_0(M)$ 的自伴延拓也不同. 根据定理 3.7.3, 利用 Titchmarsh 公式可以得出这些 $\rho_{jk}(\lambda)$.

设 $\rho(\lambda)$ 是一个谱矩阵, 即 ρ_{jk} 局部有界变差, $\rho(\Delta)$ 非负定, 令

$$L^2_\rho = \left\{ g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \left| \|g\|_\rho^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^2 \overline{g_j(\lambda)} g_k(\lambda) d\rho_{jk}(\lambda) < \infty \right. \right\},$$

这里 $\rho(\Delta)$ 非负定保证了 $\|g\|_\rho^2 \geq 0$.

定理 3.11.4 设 ρ 是 $T_0(M)$ 的 Weyl-Titchmarsh 自伴延拓 T 的谱矩阵, 则对任何 $f \in L^2(-\infty, \infty)$, 存在 $g \in L^2_\rho$, 使得

$$(1) \lim_{(c,d) \rightarrow (-\infty, \infty)} \|g - g_{cd}\|_\rho = 0, \text{ 其中,}$$

$$g_{cd} = \begin{pmatrix} g_{cd1} \\ g_{cd2} \end{pmatrix}, \quad g_{cd1} = \int_c^d f(x) \varphi(x, \cdot) dx, \quad g_{cd2} = \int_c^d f(x) \theta(x, \cdot) dx;$$

$$(2) \|f\|^2 = \|g\|_\rho^2 \text{ (Parseval 等式);}$$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) = & \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda) g_1(\lambda) d\rho_{11}(\lambda) + \varphi(x, \lambda) g_2(\lambda) d\rho_{12}(\lambda) \\ & + \theta(x, \lambda) g_1(\lambda) d\rho_{21}(\lambda) + \theta(x, \lambda) g_2(\lambda) d\rho_{22}(\lambda) \end{aligned}$$

(按 $L^2(-\infty, \infty)$ 意义收敛.) 称 g 为 f 的广义 Fourier 变换, 记为 \widehat{f} .

反过来, 对任何 $g \in L^2_\rho$,

$$\begin{aligned} f_{cd}(x) = & \int_c^d \varphi(x, \lambda) g_1(\lambda) d\rho_{11}(\lambda) + \varphi(x, \lambda) g_2(\lambda) d\rho_{12}(\lambda) \\ & + \theta(x, \lambda) g_1(\lambda) d\rho_{21}(\lambda) + \theta(x, \lambda) g_2(\lambda) d\rho_{22}(\lambda) \end{aligned}$$

满足 $\{f_{cd}\}$ 是 $L^2(-\infty, \infty)$ 的 Cauchy 列, 存在 $f \in L^2(-\infty, \infty)$, 使得

$$\lim_{\substack{c \rightarrow -\infty, \\ d \rightarrow \infty}} \|f_{cd} - f\| = 0$$

且

$$\widehat{f} = g.$$

证明略. 其证明大致与 3.8 节 ~3.10 节类似.

在 $(-\infty, \infty)$ 的情形, 关于特征展开, 谱和谱分解, 据所了解的, 还没有一本书严格地写过, 认为把这些东西严格地写一下还是有意义的! 这里只是对 Weyl-Titchmarsh 自伴延拓而言, 一般的自伴延拓, 还没有看到这方面的结果. 另外, 如何由 ρ 去得到 $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ 也没有经过仔细的推敲.

第4章 例子

4.1 微分算式 $-iD$ 与 $L^2(\mathbf{R})$ 上的 Fourier 变换

4.1.1 自伴算子 $T_0(M)$

$$M = -iD, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$My = iy, \quad y' = -y, \quad y = e^{-x} \notin L^2(\mathbf{R}), \quad d_+ = 0,$$

$$My = -iy, \quad y' = y, \quad y = e^x \notin L^2(\mathbf{R}), \quad d_- = 0.$$

$T_0(M)$ 的亏指数为 $(0, 0)$, 所以自伴.

4.1.2 $T_0(M)$ 的谱

设 $\lambda \in \mathbf{R}$, 由于

$$My = \lambda y, \quad -iy' = \lambda y, \quad y' = i\lambda y,$$

非零解 $y = Ce^{i\lambda x}$, $C \neq 0$, 而 $e^{i\lambda x} \notin L^2(\mathbf{R})$, 故 $T_0(M)$ 无特征值, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $(T_0(M) - \lambda I)^{-1}$ 都存在. 考虑函数

$$f(x) = \beta^{\frac{1}{4}} e^{-\beta x^2 + i\lambda x}, \quad \beta > 0.$$

因为

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{\frac{1}{2}} e^{-2\beta x^2} dx = \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\|f'\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{\frac{1}{2}} (4\beta^2 x^2 + \lambda^2) e^{-2\beta x^2} dx < \infty,$$

所以 $f \in \mathcal{D}(T_0(M))$. 于是 $(T_0(M) - \lambda I)f \in \mathcal{D}((T_0(M) - \lambda I)^{-1})$, 可是

$$(T_0(M) - \lambda I)f = 2i\beta^{\frac{5}{4}} x e^{-\beta x^2 + i\lambda x},$$

$$\|(T_0(M) - \lambda I)f\|^2 = 4\beta^{\frac{5}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\beta x^2} dx \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow +0,$$

而

$$\|(T_0(M) - \lambda I)^{-1}(T_0(M) - \lambda I)f\|^2 = \|f\|^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

这说明 $(T_0(M) - \lambda I)^{-1}$ 是无界的, 所以 $\lambda \in \sigma_c(T_0(M))$. 于是

$$\sigma(T_0(M)) = \sigma_c(T_0(M)) = \mathbf{R}.$$

4.1.3 预解算子

$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} \lambda \neq 0, R(\lambda, T_0(M)) = (\lambda I - T_0(M))^{-1}$ 是 $L^2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{D}(T_0(M))$ 的有界线性算子. 设

$$R(\lambda, T_0(M))f = y, \quad f \in L^2(\mathbf{R}),$$

$$(\lambda I - T_0(M))y = f,$$

解方程

$$\lambda y + iy' = f,$$

其中, $y \in \mathcal{D}(T_0(M)), y, y' \in L^2(\mathbf{R})$, 故 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$. 这个齐次线性微分方程的解是

$$y = Ce^{i\lambda x}.$$

利用常数变易法有

$$C'(x) = -ie^{-i\lambda x}f(x).$$

当 $\operatorname{Im} \lambda > 0$ 时, $e^{-i\lambda x}$ 在 $(-\infty, 0]$ 上可积, 所以 $e^{-i\lambda x}f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上可积,

$$C(x) = C - i \int_{-\infty}^x e^{-i\lambda t} f(t) dt,$$

因而

$$y = e^{i\lambda x} \left(C - i \int_{-\infty}^x e^{-i\lambda t} f(t) dt \right).$$

由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, 应有 $C = 0$. 于是

$$y = -i \int_{-\infty}^x e^{i\lambda(x-t)} f(t) dt.$$

类似地, 当 $\operatorname{Im} \lambda < 0$ 时,

$$y = i \int_x^{\infty} e^{i\lambda(x-t)} f(t) dt,$$

所以

$$R(\lambda, T_0(M))f = \begin{cases} -i \int_{-\infty}^x e^{i\lambda(x-t)} f(t) dt, & \operatorname{Im} \lambda > 0, \\ i \int_x^{\infty} e^{i\lambda(x-t)} f(t) dt, & \operatorname{Im} \lambda < 0. \end{cases}$$

4.1.4 谱族与谱分解 $T_0(M) = \int_{\mathbf{R}} \lambda dE_{\lambda}$

利用预解算子来计算谱族 $\{E_{\lambda} \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$, 由于积分区域是 \mathbf{R} , 为了便于分析上的处理, 先考虑支集有限的函数, 这些函数在 $L^2(\mathbf{R})$ 中稠, 利用稠性不难过渡到整个空间上.

设 $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ 都是支集有限的函数, 则由内积连续性得

$$\begin{aligned} (E_{(a,b)} f, g) &= \left(\lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} (R(\mu - i\varepsilon, T_0(M)) - R(\mu + i\varepsilon, T_0(M))) d\mu f, g \right) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} ((R(\mu - i\varepsilon, T_0(M)) - R(\mu + i\varepsilon, T_0(M))) f, g) d\mu \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} \left[i \int_x^{\infty} e^{i(\mu - i\varepsilon)(x-t)} f(t) dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \int_{-\infty}^x e^{i(\mu + i\varepsilon)(x-t)} f(t) dt \right] dx \right) d\mu. \end{aligned}$$

因为 $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ 且支集有限, 所以 f, g 都可积且积分均在有限区域上进行, 可以交换积分次序

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left(i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t e^{i(\mu - i\varepsilon)(x-t)} f(t) \overline{g(x)} dx \right. \\ &\quad \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_t^{\infty} e^{i(\mu + i\varepsilon)(x-t)} f(t) \overline{g(x)} dx \right) d\mu, \end{aligned}$$

$f(t)\overline{g(x)}$ 可积, 故可用 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t e^{i\mu(x-t)} f(t) \overline{g(x)} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_t^{\infty} e^{i\mu(x-t)} f(t) \overline{g(x)} dx \right) d\mu \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu(x-t)} f(t) \overline{g(x)} dt dx \right) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu(x-t)} f(t) dt \right) d\mu. \end{aligned}$$

令

$$\hat{f}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\mu t} dt,$$

因为 $\text{supp} f$ 有限且 f 可积, 这是通常意义的积分, $\hat{f}(\mu)$ 是 f 的 Fourier 变换. 于是

$$(E_{(a,b)}f, g) = \int_a^b \hat{f}(\mu) \overline{\hat{g}(\mu)} d\mu.$$

为了给出 $E_{(a,b)}$ 的表达式, 先让 $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$ 得

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mu) \overline{\hat{g}(\mu)} d\mu.$$

由此可得当 $f \in L^2(\mathbf{R})$, $\text{supp} f$ 有限时, $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ 且

$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2.$$

对一般的 $f \in L^2(\mathbf{R})$, 取 $f_n = f|_{[-n,n]}$, 则 $f_n \in L^2(\mathbf{R})$, $\text{supp} f_n \subset [-n, n]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. 那么 $\{\hat{f}_n\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的 Cauchy 列, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = h$, 则

$$\|f\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n\|^2 = \|h\|^2.$$

而在 $L^2(\mathbf{R})$ 平均收敛意义下,

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_n^n f(t) e^{-i \cdot t} dt,$$

所以很自然地称 h 为 f 的 Fourier 变换, 记为

$$h = \hat{f} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i \cdot t} dt.$$

于是 $\forall f \in L^2(\mathbf{R})$, 其 Fourier 变换 $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ 且

$$\|f\| = \|\hat{f}\|.$$

$\forall f, g \in L^2(\mathbf{R})$, $\text{supp} g$ 有限, 取 $\{f_n\} \subset L^2(\mathbf{R})$, $\text{supp} f_n$ 有限, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, 则有

$$\begin{aligned} (E_{(a,b)}f, g) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (E_{(a,b)}f_n, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \hat{f}_n(\mu) \overline{\hat{g}(\mu)} d\mu \\ &= \int_a^b \hat{f}(\mu) \overline{\hat{g}(\mu)} d\mu = \int_a^b \hat{f}(\mu) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\mu t} dt \right)} d\mu \\ &= \int_a^b \hat{f}(\mu) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} e^{i\mu t} dt \right) d\mu. \end{aligned}$$

因为 $\hat{f}(\mu)$ 和 $\overline{g(t)}$ 都平方可积, 所以 $\hat{f}(\mu)\overline{g(t)}$ 可积, 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}\text{上式} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} \left(\int_a^b \hat{f}(\mu) e^{i\mu t} d\mu \right) dt \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \hat{f}(\mu) e^{i\mu \cdot} d\mu, g \right),\end{aligned}$$

等式对一切 $g \in L^2(\mathbf{R})$, $\text{supp } g$ 有限成立, 故

$$(E_{(a,b)}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \hat{f}(\mu) e^{i\mu x} d\mu,$$

$\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$, 右端的积分在通常意义下对每个参数 x 都存在, 通过 Fourier 变换的定义, 形式上它可以转化为作用在 f 上的一个积分算子,

$$\begin{aligned}(E_{(a,b)}f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\mu t} dt \right) e^{i\mu x} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_a^b f(t) e^{i\mu(x-t)} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{i\mu(x-t)}}{i(x-t)} \Big|_a^b dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ib(x-t)} - e^{ia(x-t)}}{x-t} f(t) dt.\end{aligned}$$

4.1.5 $L^2(\mathbf{R})$ 上的 Fourier 变换

由

$$(E_{(a,b)}f, g) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \hat{f}(\mu) e^{i\mu \cdot} d\mu, g \right), \quad f, g \in L^2(\mathbf{R}), \text{supp } g \text{ 有限},$$

让 $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow +\infty$ 可得

$$(f, g) = \left(\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \hat{f}(\mu) e^{i\mu \cdot} d\mu, g \right), \quad f, g \in L^2(\mathbf{R}), \text{supp } g \text{ 有限}.$$

于是

$$f = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \hat{f}(\mu) e^{i\mu \cdot} d\mu,$$

所以在 $L^2(\mathbf{R})$ 平均收敛意义下,

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mu) e^{i\mu \cdot} d\mu.$$

如果令

$$\check{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) e^{i\mu \cdot} d\mu, \quad h \in L^2(\mathbf{R}),$$

则有

$$f = \check{\check{f}},$$

这就是 Fourier 变换的反演公式.

4.2 微分算式 $-D^2$ 与 Fourier 展开

4.2.1 有限区间 $[-1, 1]$ 情形

$$M = -D^2, \quad x \in [-1, 1].$$

矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

满足推论 1.3.1 的条件, 所以

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T) &= \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid f(-1) = 0, f(1) = 0\}, \\ Tf &= -f'', \quad f \in \mathcal{D}(T) \end{aligned}$$

是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓, 按第 2 章的理论, T 有纯点谱 $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. 下面来求 T 的特征值, 求解边值问题

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, & \lambda \in \mathbf{R}, \\ y(\pm 1) = 0, \end{cases}$$

$$k^2 + \lambda = 0,$$

$\lambda = 0$ 或 $\lambda < 0$, 边值问题都只有平凡解. 当 $\lambda > 0$ 时,

$$k = \pm i\sqrt{\lambda},$$

$\{\cos \sqrt{\lambda}x, \sin \sqrt{\lambda}x\}$ 是基本解组,

$$y = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

由 $y(\pm 1) = 0$ 得

$$\begin{cases} C_1 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda} - C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0, \end{cases}$$

$$2C_1 \cos \sqrt{\lambda} = 0 \text{ 或 } 2C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0.$$

若 $C_1 \neq 0$, 则

$$\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

对应的规范化特征函数是

$$\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

若 $C_2 \neq 0$, 则

$$\lambda = n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

对应的规范化特征函数是

$$\sin n \pi x, \quad n = 1, 2, \dots.$$

因此

$$\sigma(T) = \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \mid n = 1, 2, \dots \right\} \cup \{ n^2 \pi^2 \mid n = 1, 2, \dots \},$$

而特征函数

$$\left\{ \cos \frac{\pi}{2} x, \sin \pi x, \cos \frac{3}{2} \pi x, \dots, \sin n \pi x, \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x, \dots \right\}$$

是 $L^2[-1, 1]$ 的规范正交基. 故 $\forall f \in L^2[-1, 1]$, 有按特征函数的展开式

$$\begin{aligned} f(x) = & \cos \frac{\pi}{2} x \int_{-1}^1 f(t) \cos \frac{\pi}{2} t dt + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \pi x \int_{-1}^1 f(t) \sin n \pi t dt \\ & + \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x \int_{-1}^1 f(t) \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi t dt. \end{aligned}$$

下面按 3.11 节的方法把它再处理一遍. M 在 -1 和 1 处都是极限圆型的, 取 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 让 φ 和 θ 分别是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} M\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(0, \lambda) = \sin \alpha = 1, \\ \varphi'(0, \lambda) = -\cos \alpha = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} M\theta = \lambda\theta, \\ \theta(0, \lambda) = \cos \alpha = 0, \\ \theta'(0, \lambda) = \sin \alpha = 1 \end{cases}$$

的解, 则

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x, \quad \theta(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}.$$

对 $-1 < a < 0$ 和 $0 < b < 1$, 考虑分别满足边界条件

$$\cos \beta y(a) + \sin \beta y'(a) = 0, \text{ 取 } \beta = 0 \text{ 即 } y(a) = 0,$$

$$\cos \gamma y(b) + \sin \gamma y'(b) = 0, \text{ 取 } \gamma = 0 \text{ 即 } y(b) = 0$$

的解

$$\varphi(x, \lambda) + m_a(\lambda)\theta(x, \lambda) \text{ 和 } \varphi(x, \lambda) + m_b(\lambda)\theta(x, \lambda),$$

它们在 0 点满足的边界条件是

$$\cos \alpha y(0) + \sin \alpha y'(0) = m_a(\lambda), \quad \text{即 } y'(0) = m_a(\lambda),$$

$$\cos \alpha y(0) + \sin \alpha y'(0) = m_b(\lambda), \quad \text{即 } y'(0) = m_b(\lambda).$$

它们分别就是 $[a, 0]$ 和 $[0, b]$ 上的 Weyl 解, 由边界条件解得

$$m_a(\lambda) = -\frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a}{\sin \sqrt{\lambda} a}, \quad m_b(\lambda) = -\frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} b}{\sin \sqrt{\lambda} b}.$$

于是

$$M_-(\lambda) = \lim_{a \rightarrow -1} m_a(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}{\sin \sqrt{\lambda}},$$

$$M_+(\lambda) = \lim_{b \rightarrow 1} m_b(\lambda) = -\frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}{\sin \sqrt{\lambda}} = -M_-(\lambda),$$

故

$$M_{11}(\lambda) = \frac{1}{M_-(\lambda) - M_+(\lambda)} = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}},$$

$$M_{12}(\lambda) = M_{21}(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{M_-(\lambda) + M_+(\lambda)}{M_-(\lambda) - M_+(\lambda)} \right) = 0,$$

$$M_{22}(\lambda) = \frac{M_-(\lambda)M_+(\lambda)}{M_-(\lambda) - M_+(\lambda)} = -\frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}{2 \sin \sqrt{\lambda}},$$

$M_{11}(\lambda)$ 的极点是

$$\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\operatorname{Res}_{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} M_{11}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow (n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \left(\lambda - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \right) \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}} = -1;$$

$M_{22}(\lambda)$ 的极点是

$$\lambda = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\operatorname{Res}_{n^2\pi^2} M_{22}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow n^2\pi^2} -(\lambda - n^2\pi^2) \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}{2 \sin \sqrt{\lambda}} = -n^2\pi^2.$$

这样, $\forall f \in L^2[-1, 1]$ 便有展开式

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^1 \varphi(x, \lambda) \left(\int_{-1}^1 f(s) \varphi(s, \lambda) ds \right) d\rho_{11}(\lambda) \\ &\quad + \int_{-1}^1 \theta(x, \lambda) \left(\int_{-1}^1 f(s) \theta(s, \lambda) ds \right) d\rho_{22}(\lambda) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi x \left(\int_{-1}^1 f(s) \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi s ds \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \left(\int_{-1}^1 f(s) \sin n\pi s ds \right). \end{aligned}$$

4.2.2 无限区间 $[0, \infty)$ 情形

$$M = -D^2, \quad x \in [0, \infty).$$

$-y'' = 0$ 的基本解组 $\{1, x\}$ 的两个函数都不属于 $L^2[0, \infty)$, M 在 ∞ 处是极限点型的, $T_0(M)$ 的亏指数为 $(1, 1)$, 由 3.6 节, 它的自伴延拓 T 形如

$$\mathcal{D}(T) = \{ f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \sin \alpha f(0) - \cos \alpha f'(0) = 0 \}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

$$T = T_1(M)|_{\mathcal{D}(T)}.$$

设 φ 和 θ 满足

$$\begin{cases} M\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(0) = \sin \alpha, \\ \varphi'(0) = -\cos \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} M\theta = \lambda\theta, \\ \theta(0) = \cos \alpha, \\ \theta'(0) = \sin \alpha, \end{cases}$$

则

$$\varphi(x, \lambda) = \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda}x - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x,$$

$$\theta(x, \lambda) = \cos \alpha \cos \sqrt{\lambda}x + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Weyl 解是

$$\psi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + M(\lambda)\theta(x, \lambda) \in L^2[0, \infty).$$

下面来求 Weyl 函数 $M(\lambda)$, 由于 $M(\bar{\lambda}) = \overline{M(\lambda)}$, 所以仅考虑 $\text{Im}\lambda > 0$, 设 $\lambda = re^{i\omega}$, 则 $\sin\omega > 0$, $\{e^{i\sqrt{\lambda}x}, e^{-i\sqrt{\lambda}x}\}$ 是 $-y'' = \lambda y$ 的基本解组, 其中,

$$e^{-i\sqrt{\lambda}x} = e^{\sqrt{r}(\sin\frac{\omega}{2}x - i\cos\frac{\omega}{2}x)} \notin L^2[0, \infty),$$

故

$$e^{i\sqrt{\lambda}x} \in L^2[0, \infty),$$

而

$$\psi(x, \lambda) = Ce^{i\sqrt{\lambda}x}.$$

可是

$$\psi(x, \lambda) = (\sin\alpha + M(\lambda)\cos\alpha)\cos\sqrt{\lambda}x + \left(M(\lambda)\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)\sin\sqrt{\lambda}x,$$

于是

$$\begin{cases} \sin\alpha + M(\lambda)\cos\alpha = C, \\ -\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\lambda}} + M(\lambda)\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\lambda}} = iC, \end{cases}$$

消去 C 解得

$$M(\lambda) = \frac{-\sqrt{\lambda}\sin\alpha + i\cos\alpha}{\sqrt{\lambda}\cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{(1-\lambda)\cos\alpha\sin\alpha + i\sqrt{\lambda}}{\lambda\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}.$$

为了求 T 的特征值, 要找 $M(\lambda)$ 的极点, 即解方程

$$\sqrt{\lambda}\cos\alpha + i\sin\alpha = 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

或

$$\tan\alpha = i\sqrt{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

(1) $\tan\alpha > 0$.

$M(\lambda)$ 无极点, $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \sigma_c(T)$. 由于

$$\text{Im}M(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases}$$

按 Titchmarsh 公式

$$d\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}d\lambda}{\lambda\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

ρ 在 $(0, \infty)$ 上单调增加

$$\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0, \infty).$$

记 $h = \tan \alpha$, 令 $\lambda = s^2$, 则

$$\begin{aligned}\theta(x, \lambda) &= \cos \alpha \cos sx + \sin \alpha \frac{\sin sx}{s} \\ &= \cos \alpha \left(\cos sx + \frac{h}{s} \sin sx \right), \\ \hat{f}(s) &= \int_0^\infty f(x) \theta(x, \lambda) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \int_0^\infty f(x) \left(\cos sx + \frac{h}{s} \sin sx \right) dx, \\ f(x) &= \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\lambda) \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) \\ &= \int_0^\infty \hat{f}(s) \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \left(\cos sx + \frac{h}{s} \sin sx \right) \frac{1}{\pi s^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} 2s ds \\ &= \frac{2\sqrt{1+h^2}}{\pi} \int_0^\infty \hat{f}(s) \left(\cos sx + \frac{h}{s} \sin sx \right) \frac{s^2}{h^2 + s^2} ds.\end{aligned}$$

$$(2) \tan \alpha = 0, \alpha = 0.$$

$$\begin{aligned}\varphi(x, \lambda) &= -\frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}, \quad \theta(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x, \\ M(\lambda) &= \frac{i}{\sqrt{\lambda}}, \quad \operatorname{Im} M(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases} \\ d\rho(\lambda) &= \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{\lambda}} d\lambda, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

于是

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(x) \cos sxdx, \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \hat{f}(x) \cos sxdx,$$

这就是熟知的 Fourier 余弦公式.

$$(3) \tan \alpha < 0.$$

记 $h = \tan \alpha$, 这时 $\lambda = -h^2$ 是 $M(\lambda)$ 的极点, 因而是 T 的特征值, 对应的特征函数是

$$\begin{aligned}\theta(x, -h^2) &= \cos \alpha \left(\cos \sqrt{-h^2} x + \frac{h}{\sqrt{-h^2}} \sin \sqrt{-h^2} x \right) \\ &= \cos \alpha e^{hx}.\end{aligned}$$

因为

$$\int_0^\infty \cos^2 \alpha e^{2hx} dx = \frac{\cos^2 \alpha}{2|h|},$$

所以规范化了的特征函数是 $\sqrt{2|h|} e^{hx}$, $\lambda = -h^2$ 是 $\rho(\lambda)$ 的跃点, 跃度为

$$\frac{1}{\|\theta(\cdot, -h^2)\|^2} = \frac{2|h|}{\cos^2 \alpha},$$

这样便有

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \{-h^2\} \cup [0, \infty).$$

$$d\rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < -h^2, \\ 0, & -h^2 < \lambda < 0, \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}, & \lambda > 0. \end{cases}$$

$\lambda > 0$ 时, 令 $\lambda = s^2$,

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \int_0^\infty f(x) \left(\cos sx + \frac{h}{s} \sin sx \right) dx.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\lambda) \theta(x, \lambda) d\rho(\lambda) \\ &= \frac{2|h|}{\cos^2 \alpha} \hat{f}(-h^2) \theta(x, -h^2) + \int_0^\infty \hat{f}(\lambda) \theta(x, \lambda) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} d\lambda \\ &= 2|h| e^{hx} \int_0^\infty f(t) e^{ht} dt + \frac{2\sqrt{1+h^2}}{\pi} \int_0^\infty \hat{f}(s) \left(\cos sx + \frac{h}{s} \sin sx \right) \frac{s^2}{h^2 + s^2} ds. \end{aligned}$$

4.2.3 无限区间 $(-\infty, \infty)$ 情形

$$M = -D^2, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$y'' = 0$ 的两个线性无关的解 1 和 x 都不属于 $L^2(-\infty, 0]$ 和 $L^2[0, \infty)$, 所以 M 在 $\pm\infty$ 都是极限点型的, 因而由 Kodaira 公式, $T_0(M)$ 自伴.

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x, \quad \theta(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$$

满足

$$\begin{cases} M\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(0) = 1, \\ \varphi'(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} M\theta = \lambda\theta, \\ \theta(0) = 0, \\ \theta'(0) = 1. \end{cases}$$

若 $\operatorname{Im} \lambda > 0$, 则记 $\lambda = re^{i\omega}$, $\sin \omega > 0$, 而

$$\begin{aligned} e^{i\sqrt{\lambda}x} &= e^{\sqrt{r}x(-\sin \frac{\omega}{2} + i \cos \frac{\omega}{2})} \in L^2[0, \infty), \\ e^{i\sqrt{\lambda}x} &= \cos \sqrt{\lambda}x + i \sin \sqrt{\lambda}x = \varphi(x, \lambda) + i\sqrt{\lambda}\theta(x, \lambda), \end{aligned}$$

故

$$M_+(\lambda) = i\sqrt{\lambda}.$$

若 $\operatorname{Im} \lambda < 0$, 则 $e^{-i\sqrt{\lambda}x} \in L^2(-\infty, 0]$, 而

$$e^{-i\sqrt{\lambda}x} = \cos \sqrt{\lambda}x - i \sin \sqrt{\lambda}x = \varphi(x, \lambda) - i\sqrt{\lambda}\theta(x, \lambda),$$

故

$$M_-(\lambda) = -i\sqrt{\lambda}.$$

这样便有

$$M_{11}(\lambda) = \frac{i}{2\sqrt{\lambda}}, \quad M_{12}(\lambda) = M_{21}(\lambda) = 0, \quad M_{22}(\lambda) = \frac{i\sqrt{\lambda}}{2}.$$

按 Titchmarsh 公式,

$$\begin{aligned} d\rho_{11}(\lambda) &= \begin{cases} \frac{d\lambda}{2\pi\sqrt{\lambda}}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases} \\ d\rho_{22}(\lambda) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda}d\lambda}{2\pi}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

故

$$\sigma(T_0(M)) = \sigma_c(T_0(M)) = [0, \infty).$$

对任何 $f \in L^2(\mathbf{R})$, 记

$$g_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \sqrt{\lambda}x dx, \quad g_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} dx,$$

则

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda) g_1(\lambda) d\rho_{11}(\lambda) + \theta(x, \lambda) g_2(\lambda) d\rho_{22}(\lambda) \\ &= \lambda^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st dt \right) \cos sx ds + \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin st dt \right) \sin sx ds \right], \end{aligned}$$

这就是通常的 Fourier 积分公式.

4.3 Legendre 微分算式

4.3.1 Legendre 微分算式的亏指数

$$M = -D^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\tan^2 t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

因为

$$\lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\tan^2 t \right) = -\infty,$$

所以 $\pm \frac{\pi}{2}$ 是奇型端点.

对方程 $Mu = \lambda u$, 作变换

$$\begin{aligned} x &= \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ y &= \frac{u}{\sqrt{\cos t}}, \end{aligned}$$

则

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow x \in [-1, 1],$$

$$u = y\sqrt{\cos t},$$

$$\dot{u} = y'(\cos t)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y(\cos t)^{-\frac{1}{2}} \sin t,$$

$$\ddot{u} = y''(\cos t)^{\frac{5}{2}} - 2y'(\cos t)^{\frac{1}{2}} \sin t - \frac{1}{4}y(\cos t)^{-\frac{3}{2}} \sin^2 t - \frac{1}{2}y(\cos t)^{\frac{1}{2}}.$$

于是 $Mu = \lambda u$ 变成

$$-y'' \cos^2 t + 2y' \sin t = \lambda y,$$

即

$$-(1-x^2)y'' + 2xy' = \lambda y,$$

$$-((1-x^2)y')' = \lambda y, \quad x \in [-1, 1],$$

$$M = -D(1-x^2)D, \quad x \in [-1, 1].$$

求

$$-((1-x^2)y')' = 0$$

的基本解组. 显然

$$y_1(x) = 1, \quad x \in [-1, 1]$$

是一个, $y_1 \in L^2[-1, 1]$. 而由

$$(1-x^2)y_2' = C,$$

$$y_2' = \frac{C}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$$

得另一个

$$y_2 = \frac{C}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

由于在 $x=1$ 附近,

$$y_2 = O(|\ln(1-x)|),$$

而 $\ln^2 x$ 在 0 附近是可积的, $x=-1$ 的情况类似, 故 $y_2 \in L^2[-1, 1]$.

因此两个线性无关的解都属于 $L^2[-1, 1]$. 表示 M 在 ± 1 都是极限圆型, 亏指数为 $(2, 2)$.

4.3.2 $T_0(M)$ 的自伴延拓

因为

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ u \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid u\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0 \right\},$$

$$T = T_1(M)|_{\mathcal{D}(T)}$$

是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓, 而由

$$u = y\sqrt{\cos t}, \quad u\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

知

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ y \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \lim_{x \rightarrow \pm 1} y(x)\sqrt{\cos \arccos x} = 0 \right\},$$

$$T = T_1(M)|_{\mathcal{D}(T)}$$

是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓. 由于是极限圆型的, T 有纯点谱, $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. 另外, 因为

$$(Tf, f) = \int_{-1}^1 -((1-x^2)f'(x))' \overline{f(x)} dx = \int_{-1}^1 (1-x^2) |f'(x)|^2 dx \geq 0,$$

T 是下半有界的, 所以 $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

4.3.3 $My = \lambda y$ 的基本解组

由线性齐次常微分方程的 Fuchs 理论, 0 点是方程 $My = \lambda y = 0$ 的正常点. 下面来求它的幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

比较系数得

$$2a_2 + \lambda a_0 = 0,$$

$$3 \cdot 2a_3 + (\lambda - 2)a_1 = 0,$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda - n(n+1))a_n = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

这样得到两个解. 取 $a_0 = 1, a_1 = 0$,

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

得

$$y_1(x) = 1 + \frac{-\lambda}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(-\lambda)(2 \cdot 3 - \lambda)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots,$$

取 $a_0 = 0, a_1 = 1$ 得

$$y_2(x) = x + \frac{1 \cdot 2 - \lambda}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{(1 \cdot 2 - \lambda)(3 \cdot 4 - \lambda)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \dots$$

$y_1(x)$ 是偶函数, $y_2(x)$ 是奇函数, 它们线性无关.

4.3.4 $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{n(n+1) | n = 0, 1, 2, \dots\}$

由

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n = \frac{1}{n+2} \left(1 - \frac{\lambda}{n(n+1)}\right) a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

当 $\lambda = n(n+1)$ 时, y_1 或 y_2 中有一个是 n 阶多项式, 在 $[-1, 1]$ 上平方可积, 所以 $n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 是特征值. 如果 $0 < \lambda \neq n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 则 y_1 和 y_2 都是无穷级数, 考虑其收敛性. 记

$$\lambda = \alpha(\alpha+1), \quad \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2},$$

则

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} a_0,$$

$$a_3 = \frac{-\alpha(\alpha+1) + 1 \cdot 2}{2 \cdot 3} a_1,$$

$$a_{n+2} = \frac{-\alpha(\alpha+1) + n(n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n = -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n,$$

于是

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{(\alpha-2n+2)(\alpha-2n+4) \cdots (\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3) \cdots (\alpha+2n-1)}{(2n)!} a_0,$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\alpha-2n+1)(\alpha-2n+3) \cdots (\alpha-1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+2n-2)(\alpha+2n)}{(2n+1)!} a_1.$$

由于

$$\left| \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} \right| = \left| -\frac{(\alpha - 2n + 2)(\alpha + 2n - 1)}{(2n - 1)(2n)} \right| \rightarrow 1,$$

$$\left| \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} \right| = \left| -\frac{(\alpha - 2n + 1)(\alpha + 2n)}{2n(2n + 1)} \right| \rightarrow 1,$$

根据 d'Alembert 判别法, 无穷级数在 $|x| < 1$ 时绝对收敛, 在 $|x| > 1$ 时发散. 在端点 ± 1 可用 Gauss 判别法,

$$\begin{aligned} \frac{a_{2n-2}}{a_{2n}} &= \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \left(1 - \frac{\alpha + 2}{2n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\alpha - 1}{2n}\right)^{-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{\alpha + 2}{2n} + \left(\frac{\alpha + 2}{2n}\right)^2 + \cdots\right) \left(1 - \frac{\alpha - 1}{2n} + \left(\frac{\alpha - 1}{2n}\right)^2 - \cdots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha + 2}{2} - \frac{\alpha - 1}{2}\right) + \frac{\mu}{n^2} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{\mu}{n^2}, \end{aligned}$$

所以 y_1 在 $x = 1$ 发散. 由偶性, 在 $x = -1$ 也发散. 类似地, y_2 在 $x = \pm 1$ 也发散. 当 $n = k + 2l$ 时, 由于

$$a_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{(n-2)(n-1)}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{(n-4)(n-3)}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda}{k(k+1)}\right)^k a_k,$$

设 k 是一个固定的大自然数, 使得上面的那些乘积因子都是正的, 那么当 $n \rightarrow \infty$

时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛而得

$$\left(1 - \frac{\lambda}{(n-2)(n-1)}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{(n-4)(n-3)}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda}{k(k+1)}\right) \rightarrow \gamma > 0.$$

于是当 $n > k$ 时,

$$a_n > \frac{k}{n} a_k \gamma = \frac{\beta}{n}.$$

这样在 $x = 1$ 附近,

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n \text{ 无界,}$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \notin \mathcal{D}(T)$, 因而 λ 不是特征值. 于是

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{n(n+1) \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}.$$

4.3.5 Legendre 多项式 $P_n(x)$, Rodrigues 公式

来求对应于 $n(n+1)$ 的特征函数, 由于

$$a_{n+2} = \frac{1}{n+2} \left(1 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)} \right) n a_n = 0.$$

对应于 $n(n+1)$ 的特征函数是个 n 阶多项式, 称之为 Legendre 多项式. 由

$$a_n = \frac{(n-2)(n-1) - n(n+1)}{(n-1)n} a_{n-2}$$

得

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n.$$

由

$$a_{n-2} = \frac{(n-4)(n-3) - n(n+1)}{(n-3)(n-2)} a_{n-4}$$

得

$$a_{n-4} = (-1)^2 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} a_n.$$

一般地,

$$a_{n-2r} = (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-2r+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2r)(2n-1)(2n-3) \cdots (2n-2r+1)} a_n,$$

所以

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n \left(x^n + (-1) \frac{n!(2n-3)!!}{2(n-2)!(2n-1)!!} x^{n-2} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^r \frac{n!(2n-2r-1)!!}{2^r r!(n-2r)!(2n-1)!!} x^{n-2r} + \cdots \right) \\ &= a_n \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^r \frac{n!(2n-2r-1)!!}{2^r r!(n-2r)!(2n-1)!!} x^{n-2r}. \end{aligned}$$

下面来找 $P_n(x)$ 的简单形式, 因为

$$\begin{aligned} \frac{n!(2n-2r-1)!!}{2^r r!(n-2r)!(2n-1)!!} &= \frac{n!(2n-2r-1)!!}{2^r r!(n-2r)!(2n-1)!!} \cdot \frac{(2n-2r)!!}{2^{n-r}(n-r)!} \\ &= \frac{n!(2n-2r)!}{2^n r!(n-2r)!(n-r)!(2n-1)!!} \\ &= \frac{n!(2n-2r)! 2^n n!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!(2n)!!(2n-1)!!} \\ &= \frac{(n!)^2 (2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!(2n)!} \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{r} \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!}x^{n-2r} &= (2n-2r)(2n-2r-1)\cdots(n-2r+1)x^{n-2r} \\ &= (x^{2n-2r})^{(n)},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \frac{a_n}{2^n} \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^r \binom{n}{r} (x^{2n-2r})^{(n)} \\ &= \frac{a_n}{2^n} \left(\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} x^{2n-2r} \right)^{(n)} \\ &= \frac{a_n}{2^n} \left((x^2 - 1)^n \right)^{(n)}.\end{aligned}$$

取 $a_n = \frac{1}{n!}$ 得

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left((x^2 - 1)^n \right)^{(n)}.$$

Legendre 多项式的这个微商表示通常称为 Rodrigues 公式. 前几个 Legendre 多项式是

$$\begin{aligned}P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}, \\ P_4(x) &= \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}, \quad P_5(x) = \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}.\end{aligned}$$

4.3.6 $P_n(x)$ 的规范化 $\psi_n(x)$

记 $y_n = (x^2 - 1)^n$, 则用分部积分法可得

$$\int_{-1}^1 |P_n(x)|^2 dx = \frac{2}{2n+1},$$

故

$$\psi_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

它们组成了 $L^2[-1, 1]$ 的规范正交基. 任何 $f \in L^2[-1, 1]$ 都有展开式

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n) \psi_n.$$

4.4 Bessel 微分算式

本节讨论 Bessel 微分算式

$$M = -D^2 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$$

在不同区间上生成的自伴算子的谱与按特征函数的展开式.

4.4.1 Bessel 函数

对微分方程 $My = \lambda y$ 作变换 $y = \sqrt{x}z$, 有

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}z + x^{\frac{1}{2}}z', \\ y'' &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}z + x^{-\frac{1}{2}}z' + x^{\frac{1}{2}}z'', \end{aligned}$$

代入方程得

$$x^2 z'' + xz' + (\lambda x^2 - \nu^2)z = 0$$

或

$$z'' + \frac{1}{x}z' + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{x^2}\right)z = 0,$$

这是标准的 Bessel 微分方程. 来求它的基本解组, 先作一个自变量的变换将 λ 隐去: $\sqrt{\lambda}x = t$,

$$\begin{aligned} x \frac{dz}{dx} &= \sqrt{\lambda}x \frac{dz}{d\sqrt{\lambda}x} = t \frac{dz}{dt}, \\ x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} &= (\sqrt{\lambda}x)^2 \frac{d^2 z}{(d\sqrt{\lambda}x)^2} = t^2 \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned} t^2 \ddot{z} + t\dot{z} + (t^2 - \nu^2)z &= 0, \\ \ddot{z} + \frac{1}{t}\dot{z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)z &= 0. \end{aligned}$$

按 Fuchs 理论, 点 x_0 称为方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的正则奇点, 如果方程的基本解组形如

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (x - x_0)^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_0 \neq 0, \\ y_2(x) &= by_1(x) \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad b_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Fuchs 证明了 x_0 是方程的正则奇点的充要条件是 $(x-x_0)p(x)$ 和 $(x-x_0)^2q(x)$ 在 x_0 邻域内解析, 这时解的级数形式是

$$y(x) = (x-x_0)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad a_0 \neq 0,$$

其中, ρ 满足指标方程

$$\rho(\rho-1) + \alpha_0\rho + \beta_0 = 0,$$

这里 α_0, β_0 是 $(x-x_0)p(x)$ 和 $(x-x_0)^2q(x)$ 解析展开的常数项系数

$$(x-x_0)p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-x_0)^n, \quad (x-x_0)^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x-x_0)^n.$$

现在

$$tp(t) = 1, \quad t^2q(t) = t^2 - \nu^2,$$

所以 $t=0$ 是正则奇点, 相应的 $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -\nu^2$, 这时指标方程是

$$\rho^2 - \nu^2 = 0.$$

来求它们的两个线性无关的解.

1. ν 不是整数的情形

设

$$z_1(t) = t^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad a_0 \neq 0,$$

代入方程得

$$t^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu+n)(\nu+n-1)a_n t^{\nu+n-2} + t \sum_{n=0}^{\infty} (\nu+n)a_n t^{\nu+n-1} + (t^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\nu+n} = 0,$$

比较 t 的不同方幂的系数, 有

$$(\nu(\nu-1) + \nu - \nu^2)a_0 = 0,$$

$$((\nu+1)\nu + (\nu+1) - \nu^2)a_1 = 0,$$

$$((\nu+n)(\nu+n-1) + (\nu+n) - \nu^2)a_n + a_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

解之得

a_0 任意,

$$a_1 = 0,$$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(2\nu+n)n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

利用最后这个递推关系有

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0,$$

而

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{1}{4n(\nu+n)} a_{2n-2} = \cdots = (-1)^n \frac{1}{4^n n! (\nu+n)(\nu+n-1) \cdots (\nu+1)} a_0 \\ &= (-1)^n \frac{1}{2^{2n} \Gamma(n+1)(\nu+n)(\nu+n-1) \cdots (\nu+1)} a_0. \end{aligned}$$

通常取

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)},$$

则有

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n+\nu} \Gamma(n+1) \Gamma(\nu+n+1)},$$

因而

$$z_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

由 d'Alembert 判别法, 幂级数部分的收敛半径是 ∞ . 把这个函数记成 $J_\nu(t)$, 称为 ν 阶 Bessel 函数. 类似地得另一解 —— $-\nu$ 阶 Bessel 函数

$$z_2(t) = J_{-\nu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(-\nu+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu}.$$

当 $\nu \notin \mathbf{Z}$ 时, $\{J_\nu(t), J_{-\nu}(t)\}$ 组成了 Bessel 方程的基本解组. 一般称

$$J_\nu(t), \quad \nu \in \mathbf{R}$$

是第一类 Bessel 函数.

2. ν 是整数的情形

$J_\nu(t)$ 确定如前. 至于 $J_{-\nu}(t)$, 因为 $\Gamma(s)$ 在 $s = 0, -1, -2, \cdots$ 有简单极点, 所以

$$\Gamma(-\nu+n+1) = \infty, \quad n = 0, 1, \cdots, \nu-1.$$

于是

$$\begin{aligned} J_{-\nu}(t) &= \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(-\nu+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu} \\ &\stackrel{n=\nu+l}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+l}}{\Gamma(\nu+l+1) \Gamma(l+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2l+\nu} \\ &= (-1)^\nu J_\nu(t). \end{aligned}$$

这时 $J_\nu(t)$ 与 $J_{-\nu}(t)$ 线性相关, 所以还必须找另一个线性无关的解. 考虑

$$Y_\nu(t) = \frac{\cos \nu \pi J_\nu(t) - J_{-\nu}(t)}{\sin \nu \pi}.$$

当 ν 不是整数时, $\{J_\nu(t), Y_\nu(t)\}$ 也组成 Bessel 方程的基本解组, 后者称为 Neumann 函数或第二类 Bessel 函数.

当 ν 是整数时, $Y_\nu(t)$ 成了未定式, 用 l'Hospital 法则来得出另一个线性无关的解 (即所谓的 Frobenius 方法, 参见 G. N. Watson, 《Theory of Bessel Functions》, Cambridge, 1944).

$$\begin{aligned} Y_\nu(t) &= \lim_{k \rightarrow \nu} Y_k(t) = \lim_{k \rightarrow \nu} \frac{\frac{\partial J}{\partial k} \cos k\pi - \pi J_k(t) \sin k\pi - \frac{\partial J_{-k}}{\partial k}}{\pi \cos k\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_k}{\partial k} \right) \Big|_{k=\nu} - \frac{(-1)^\nu}{\pi} \left(\frac{\partial J_{-k}}{\partial k} \right) \Big|_{k=\nu}. \end{aligned}$$

下面来求它的表达式.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_k}{\partial k} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+k} \ln \frac{t}{2} - \frac{\Gamma'(k+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma^2(k+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+k} \right] \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+k} \left[\ln \frac{t}{2} - \psi(k+n+1) \right]. \end{aligned}$$

其中,

$$\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}.$$

当 $k \rightarrow \nu$ 时,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial J_k}{\partial k} \right) \Big|_{k=\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu} \left[\ln \frac{t}{2} - \psi(\nu+n+1) \right] \\ &= \ln \frac{t}{2} J_\nu(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!} \psi(\nu+n+1) \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}. \end{aligned}$$

另外,

$$J_{-k}(t) = \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-k+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k} + \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-k+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k}.$$

由

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi},$$

有

$$\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k}}{\Gamma(-k+n+1)} = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k} \sin(k-n)\pi\Gamma(k-n)}{\pi}.$$

于是

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k} \sin(k-n)\pi\Gamma(k-n)}{\pi} \right]_{k=\nu} \\ &= - \left[\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k} \ln \frac{t}{2} \sin(k-n)\pi\Gamma(k-n)}{\pi} + \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k} \sin(k-n)\pi\Gamma'(k-n)}{\pi} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k} \cos(k-n)\pi\Gamma(k-n)}{\pi} \right]_{k=\nu} \\ &= \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu} \cos(\nu-n)\pi\Gamma(\nu-n) \\ &= (-1)^{\nu-n} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu} \Gamma(\nu-n), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial J_{-k}}{\partial k}\right)_{k=\nu} &= \sum_{n=0}^{\nu-1} (-1)^n \frac{(\nu-n-1)!}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu} \\ & \quad + \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\nu+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu} \left[-\ln \frac{t}{2} + \psi(-\nu+n+1) \right] \\ &= (-1)^{\nu} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-n-1)!}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu} + (-1)^{\nu-1} \ln \frac{t}{2} J_{\nu}(t) \\ & \quad + (-1)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi(n+1)}{n!(\nu+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}. \end{aligned}$$

综合起来得到 ν 为整数时 Neumann 函数的表达式

$$\begin{aligned} Y_{\nu}(t) &= \frac{2}{\pi} \ln \frac{t}{2} J_{\nu}(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-n-1)!}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu} \\ & \quad - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\psi(\nu+n+1) + \psi(n+1))}{n!(\nu+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}, \end{aligned}$$

$\nu=0$ 时, $-\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-n-1)!}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu}$ 不出现.

引理 4.4.1 (Lommel 公式)

$$W(J_{\nu}, Y_{\nu}) = \frac{2}{\pi x}.$$

证明

$$J_\nu'' + \frac{1}{x}J_\nu' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu = 0,$$

$$J_{-\nu}'' + \frac{1}{x}J_{-\nu}' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J_{-\nu} = 0,$$

$$J_\nu'' J_{-\nu} - J_\nu J_{-\nu}'' + \frac{1}{x}(J_\nu' J_{-\nu} - J_\nu J_{-\nu}') = 0,$$

$$(J_\nu' J_{-\nu} - J_\nu J_{-\nu}')' + \frac{1}{x}(J_\nu' J_{-\nu} - J_\nu J_{-\nu}') = 0,$$

所以

$$J_\nu' J_{-\nu} - J_\nu J_{-\nu}' = \frac{C}{x}.$$

下面定常数 C , 由于在 0 点附近,

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}(1 + O(x^2)), \quad J_\nu'(x) = \frac{x^{\nu-1}}{2^\nu \Gamma(\nu)}(1 + O(x^2)).$$

$$J_{-\nu}(x) = \frac{x^{-\nu}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)}(1 + O(x^2)), \quad J_{-\nu}'(x) = \frac{x^{-\nu-1}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu)}(1 + O(x^2)),$$

所以

$$\begin{aligned} W(J_\nu, J_{-\nu}) &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(-\nu+1)} \right) + O(x) \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{\sin \nu\pi}{\pi} - \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \right) + O(x) \\ &= -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi x} + O(x), \end{aligned}$$

故

$$C = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi}.$$

当 ν 不是整数时,

$$W(J_\nu, Y_\nu) = \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} W(J_\nu, J_\nu) - \frac{1}{\sin \nu\pi} W(J_\nu, J_{-\nu}) = \frac{2}{\pi x},$$

可是 $W(J_\nu, Y_\nu)$ 是 ν 的连续函数, 故上式对 ν 是整数也成立.

定理 4.4.1 $My = \lambda y$ 的基本解组是 $\{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x), \sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)\}$.

4.4.2 $(0,1]$ 上 Bessel 微分算子的特征展开

1. $T_0(M)$ 的亏指数

定理 4.4.2 $(0,1]$ 上 Bessel 微分算子 $T_0(M)$ 的亏指数是

$$\begin{cases} (2, 2), & 0 \leq \nu < 1, \\ (1, 1), & \nu \geq 1. \end{cases}$$

证明 $My = iy$ 的基本解组是 $\{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{ix}), \sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{ix})\}$, $\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{ix})$ 在 $(0, 1]$ 上对一切 $\nu \geq 0$ 都有界, 所以平方可积. $\sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{ix})$ 在 0 附近等价于

$$\begin{cases} \sqrt{x} \ln x, & \nu = 0, \\ x^{\frac{1}{2}-\nu}, & \nu > 0. \end{cases}$$

由于

$$\int_0 (\sqrt{x} \ln x)^2 dx < \infty,$$

当 $0 < \nu < 1$ 时,

$$\int_0 (x^{\frac{1}{2}-\nu})^2 dx < \infty,$$

所以当 $0 \leq \nu < 1$ 时, 基本解组的两个解都平方可积, 这时亏指数是 $(2, 2)$. 当 $\nu \geq 1$ 时,

$$\int_0 (x^{\frac{1}{2}-\nu})^2 dx = \infty,$$

只有一个解是平方可积的, 这时亏指数是 $(1, 1)$.

2. $T_0(M)$ 的自伴延拓

(1) $\nu \geq 1$ 情形.

$T_0(M)$ 是极限点型的, 故

$$\mathcal{D}(T) = \{ f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \cos \alpha f(1) - \sin \alpha f'(1) = 0 \}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

$$T = T_1(M)|_{\mathcal{D}(T)}$$

便是 $T_0(M)$ 全部的自伴延拓.

(2) $0 < \nu < 1$ 情形.

$\{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{ix}), \sqrt{x}J_{-\nu}(\sqrt{ix})\}$ 是 $My = iy$ 的基本解组, 在 0 点附近.

$$\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{ix}) \sim x^{\frac{1}{2}+\nu}(1 + O(x^2)),$$

$$\sqrt{x}J_{-\nu}(\sqrt{ix}) \sim x^{\frac{1}{2}-\nu}(1 + O(x^2)),$$

它们都平方可积. $T_0(M)$ 是极限圆型的. 取 $h_i \in C^\infty(0, 1]$, $\text{supp } h_i \subset \left[0, \frac{1}{2}\right)$, 使得

$$h_1(x) = x^{\frac{1}{2}+\nu}, \quad x \in \left(0, \frac{1}{4}\right),$$

$$h_2(x) = x^{\frac{1}{2}-\nu}, \quad x \in \left(0, \frac{1}{4}\right),$$

则 $h_1, h_2 \in L^2(0, 1]$. 而

$$\begin{aligned}\langle h_1, h_1 \rangle &= [h_1, h_1]_0^1 = -[h_1, h_1](0) = -W(h_1, h_1)(0) = 0, \\ \langle h_2, h_2 \rangle &= 0, \\ \langle h_1, h_2 \rangle &= -[h_1, h_2](0) = -\lim_{x \rightarrow +0} \left(\left(\frac{1}{2} - \nu \right) x^{\frac{1}{2} + \nu} x^{-\frac{1}{2} - \nu} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} + \nu \right) x^{-\frac{1}{2} + \nu} x^{\frac{1}{2} - \nu} \right) = 2\nu, \\ \langle h_2, h_1 \rangle &= -2\nu,\end{aligned}$$

在 0 点附近,

$$Mh_1 - Mh_2 = 0,$$

所以

$$h_1, h_2 \in \mathcal{D}(T_1(M)).$$

另外, 取 $h_3, h_4 \in C^\infty(0, 1]$, $\text{supp} h_3, \text{supp} h_4 \subset \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 且

$$\begin{aligned}h_3(1) &= 1, & h_3'(1) &= 0, \\ h_4(1) &= 0, & h_4'(1) &= -1.\end{aligned}$$

则 $h_3, h_4 \in \mathcal{D}(T_1(M))$. 而

$$\begin{aligned}\langle h_3, h_3 \rangle &= \langle h_4, h_4 \rangle = 0, \\ \langle h_3, h_4 \rangle &= [h_3, h_4](1) = W(h_3, h_4)(1) = 1, \\ \langle h_4, h_3 \rangle &= -1.\end{aligned}$$

令

$$f_1 = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2, \quad f_2 = \alpha_3 h_3 + \alpha_4 h_4,$$

其中, α_1, α_2 不同时为 0, α_3, α_4 也不同时为 0. 那么 $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(T_1(M))$. 不难算得

$$\langle f_1, f_1 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_2, f_2 \rangle = 0$$

且若 α_2 和 α_3 不为 0, 则对 $h_1, h_4 \in \mathcal{D}(T_1(M))$ 有

$$\begin{vmatrix} \langle f_1, h_1 \rangle & \langle f_1, h_4 \rangle \\ \langle f_2, h_1 \rangle & \langle f_2, h_4 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\nu\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{vmatrix} = -2\nu\alpha_2\alpha_3 \neq 0,$$

故 $\{f_1, f_2\}$ 模 $\mathcal{D}(T_0(M))$ 线性无关. 按自伴延拓的 Calkin 描述.

$$\mathcal{D}(T) = \{ f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \langle f, f_1 \rangle = \langle f, f_2 \rangle = 0 \},$$

$$T = T_1(M)|_{\mathcal{D}(T)}$$

是 $T_0(M)$ 的自伴延拓, 其中, 边界条件 $\langle f, f_2 \rangle = 0$, 即

$$[f, f_2](1) = 0.$$

这就是形如

$$\cos \alpha f(1) - \sin \alpha f'(1) = 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

的加在常型端点的边界条件. 而 $\langle f, f_1 \rangle = 0$ 当 $\alpha_1 = 0$ 时, 即

$$[f, h_2](0) = 0,$$

这是一个加在奇型端点的边界条件

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\left(\frac{1}{2} - \nu \right) x^{-\frac{1}{2} - \nu} f(x) - x^{\frac{1}{2} - \nu} f'(x) \right) = 0,$$

这一自伴延拓是由分离性边界条件决定的.

(3) $\nu = 0$ 情形.

与 (2) 类似, 只要注意在 0 点附近,

$$\sqrt{x} J_0(\sqrt{ix}) \sim x^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{x} Y_0(\sqrt{ix}) \sim x^{\frac{1}{2}} \ln x$$

即可.

3. Fourier-Bessel 展开

(1) $\nu \geq 1$ 情形.

设 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓,

$$\mathcal{D}(T) = \{ f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid f(1) = 0 \},$$

取 $\varphi(x, \lambda), \theta(x, \lambda)$ 为如下:

$$\begin{cases} M\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(1) = 1, \\ \varphi'(1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} M\theta = \lambda\theta, \\ \theta(1) = 0, \\ \theta'(1) = -1, \end{cases}$$

则

$$\theta(x, \lambda) = \frac{\pi}{2} \sqrt{x} \left(Y_\nu(\sqrt{\lambda}) J_\nu(\sqrt{\lambda} x) - J_\nu(\sqrt{\lambda}) Y_\nu(\sqrt{\lambda} x) \right),$$

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2} \theta(x, \lambda) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda} \sqrt{x} \left(Y'_\nu(\sqrt{\lambda}) J_\nu(\sqrt{\lambda} x) - J'_\nu(\sqrt{\lambda}) Y_\nu(\sqrt{\lambda} x) \right),$$

Weyl 解是

$$\begin{aligned}\psi(x, \lambda) &= \varphi(x, \lambda) + M(\lambda)\theta(x, \lambda) \\ &= \left(\frac{\pi}{4} Y_\nu(\sqrt{\lambda}) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda} Y'_\nu(\sqrt{\lambda}) + \frac{\pi}{2} M(\lambda) Y_\nu(\sqrt{\lambda}) \right) \sqrt{x} J_\nu(\sqrt{\lambda} x) \\ &\quad + \left(-\frac{\pi}{4} J_\nu(\sqrt{\lambda}) - \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda}) - \frac{\pi}{2} M(\lambda) J_\nu(\sqrt{\lambda}) \right) \sqrt{x} Y_\nu(\sqrt{\lambda} x).\end{aligned}$$

因为 $\sqrt{x} Y_\nu(\sqrt{\lambda} x)$ 不是平方可积的, 故

$$M(\lambda) = -\frac{\frac{\pi}{4} J_\nu(\sqrt{\lambda}) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda})}{\frac{\pi}{2} J_\nu(\sqrt{\lambda})} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda})}{J_\nu(\sqrt{\lambda})},$$

这是一个半纯函数, 所以由定理 3.7.6, T 有纯点谱. 特征值是 $M(\lambda)$ 的极点, 即 $J_\nu(\sqrt{\lambda})$ 的零点. 由于 “ $\forall \nu \in \mathbf{R}$, $J_\nu(z)$ 都有无穷多个实零点” 和 “当 $\nu > -1$ 时, $J_\nu(z)$ 的零点都是实数” (参见文献 [1], 第七章 §18 466 页和 469 页), 所以 T 的特征值都是非负的, 设为 λ_n , $n = 1, 2, \dots$, 谱函数 ρ 在 λ_n 处的跃度

$$\begin{aligned}\rho(\lambda_n + 0) - \rho(\lambda_n - 0) &= -\operatorname{Res}_{\lambda_n} M \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) \frac{\sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda})}{J_\nu(\sqrt{\lambda})} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{\sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda}) + (\lambda - \lambda_n)(\sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda}))'}{\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} J'_\nu(\sqrt{\lambda})} \\ &= 2\lambda_n,\end{aligned}$$

故特征值都是正的, 根据定理 3.9.3, 对应于 λ_n 的特征函数是 $\theta(x, \lambda_n)$, 而 ρ 的跃度是 $\frac{1}{\|\theta(\cdot, \lambda_n)\|^2}$, 于是规范的特征函数是

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2\lambda_n} \theta(x, \lambda_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

可是

$$\begin{vmatrix} J_\nu(\sqrt{\lambda_n}) & Y_\nu(\sqrt{\lambda_n}) \\ J'_\nu(\sqrt{\lambda_n}) & Y'_\nu(\sqrt{\lambda_n}) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}},$$

即

$$\begin{aligned}J'_\nu(\sqrt{\lambda_n}) Y_\nu(\sqrt{\lambda_n}) &= \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}}, \\ Y'_\nu(\sqrt{\lambda_n}) &= -\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n} J'_\nu(\sqrt{\lambda_n})}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \sqrt{2\lambda_n} \cdot \frac{\pi}{2} \left(-\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}J'_\nu(\sqrt{\lambda_n})} \right) \sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda_n}x) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{J'_\nu(\sqrt{\lambda_n})} \sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda_n}x).\end{aligned}$$

$L^2(0,1]$ 的函数 f 按特征函数的展开是

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(J'_\nu(\sqrt{\lambda_n}))^2} \left(\int_0^1 f(t) \sqrt{t} J_\nu(\sqrt{\lambda_n}t) dt \right) \sqrt{x} J_\nu(\sqrt{\lambda_n}x).$$

这就是所谓的 Fourier-Bessel 展开.

(2) $0 < \nu < 1$ 情形.

$\nu = \frac{1}{2}$ 时, Bessel 算子退化成 $-D^2$, 对应的特征展开就是通常的 Fourier 展开, 所以假定 $\nu \neq \frac{1}{2}$. $T_0(M)$ 是极限圆型的, 考虑它的具分离型边界条件自伴延拓 T

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) | f(1) = 0 \text{ 及另一涉及 } 0 \text{ 点的边界条件}\},$$

设 θ 与 φ 满足

$$\begin{cases} M\theta = \lambda\theta, \\ \theta(1) = 0, \\ \theta'(1) = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} M\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(1) = 1, \\ \varphi'(1) = 0, \end{cases}$$

$\{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x), \sqrt{x}J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}x)\}$ 是 $My = \lambda y$ 的基本解组, 由于

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -\frac{2 \sin \nu \pi}{\pi x},$$

故

$$\theta(x, \lambda) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} \sqrt{x} \left(J_\nu(\sqrt{\lambda}) J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}x) - J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}) J_\nu(\sqrt{\lambda}x) \right),$$

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2} \theta(x, \lambda) + \frac{\pi \sqrt{\lambda}}{2 \sin \nu \pi} \sqrt{x} \left(J'_\nu(\sqrt{\lambda}) J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}x) - J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda}) J_\nu(\sqrt{\lambda}x) \right).$$

这时 Weyl 函数 $M(\lambda)$ 是 $a \rightarrow 0$ 时,

$$m(\lambda, a, \beta) = -\frac{\cot \beta \varphi(a, \lambda) + \varphi'(a, \lambda)}{\cot \beta \theta(a, \lambda) + \theta'(a, \lambda)}, \quad 0 < \beta < \pi$$

的极限.

$$\begin{aligned}
& \cot \beta \varphi(a, \lambda) + \varphi'(a, \lambda) \\
&= \frac{1}{2} \left(\cot \beta \theta(a, \lambda) + \theta'(a, \lambda) \right) \\
&+ \frac{\pi \sqrt{\lambda}}{2 \sin \nu \pi} \left[J'_\nu(\sqrt{\lambda}) \left(\cot \beta \sqrt{a} J_{-\nu}(\sqrt{\lambda} a) + \sqrt{\lambda} \sqrt{a} J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda} a) + \frac{1}{2\sqrt{a}} J_{-\nu}(\sqrt{\lambda} a) \right) \right. \\
&\quad \left. - J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda}) \left(\cot \beta \sqrt{a} J_\nu(\sqrt{\lambda} a) + \sqrt{\lambda} \sqrt{a} J'_\nu(\sqrt{\lambda} a) + \frac{1}{2\sqrt{a}} J_\nu(\sqrt{\lambda} a) \right) \right],
\end{aligned}$$

故

$$m(\lambda, a, \beta) = -\frac{1}{2} - \frac{\text{分子}}{\text{分母}}.$$

分别计算分子与分母,

$$\begin{aligned}
\text{分子} &= \frac{\pi \sqrt{\lambda}}{2 \sin \nu \pi} \left[J'_\nu(\sqrt{\lambda}) \left(\frac{(\sqrt{\lambda})^{-\nu}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} a^{-\nu+\frac{1}{2}} \cot \beta + \frac{(-\nu)(\sqrt{\lambda})^{-\nu}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} a^{-\nu-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\sqrt{\lambda})^{-\nu}}{2^{-\nu+1} \Gamma(-\nu+1)} a^{-\nu-\frac{1}{2}} \right] - J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda}) \left(\frac{(\sqrt{\lambda})^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} a^{\nu+\frac{1}{2}} \cot \beta \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nu(\sqrt{\lambda})^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} a^{\nu-\frac{1}{2}} + \frac{(\sqrt{\lambda})^\nu}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu+1)} a^{\nu-\frac{1}{2}} \right) \Big] + \cot \beta O \left(a^{-\nu+\frac{5}{2}} \right) + O \left(a^{-\nu+\frac{3}{2}} \right) \\
&\quad \cdot \frac{\pi \sqrt{\lambda}}{2 \sin \nu \pi} \left(J'_\nu(\sqrt{\lambda}) \frac{(\sqrt{\lambda})^{-\nu}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} \left(a^{-\nu+\frac{1}{2}} \cot \beta + \left(-\nu + \frac{1}{2} \right) a^{-\nu-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda}) \frac{(\sqrt{\lambda})^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left(a^{\nu+\frac{1}{2}} \cot \beta + \left(\nu + \frac{1}{2} \right) a^{\nu-\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&\quad + O \left(a^{-\nu+\frac{5}{2}} |\cot \beta| \right) + O \left(a^{-\nu+\frac{3}{2}} \right).
\end{aligned}$$

取 $c \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ 固定, 使得

$$\frac{a^{-\nu+\frac{1}{2}} \cot \beta + (-\nu + \frac{1}{2}) a^{-\nu-\frac{1}{2}}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} = c \frac{a^{\nu+\frac{1}{2}} \cot \beta + (\nu + \frac{1}{2}) a^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}.$$

那么由 c 不变, 当 a 变时,

$$\cot \beta(a) = \frac{(-\nu + \frac{1}{2}) 2^\nu \Gamma(\nu+1) a^{-\nu-\frac{1}{2}} - c(\nu + \frac{1}{2}) 2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1) a^{\nu-\frac{1}{2}}}{c 2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1) a^{\nu+\frac{1}{2}} - 2^\nu \Gamma(\nu+1) a^{-\nu+\frac{1}{2}}}.$$

由于 $\nu \neq \frac{1}{2}$, 在 $\cot \beta(a)$ 的表达式里, 上面的阶数是 $-\nu - \frac{1}{2}$, 下面的阶数是 $-\nu + \frac{1}{2}$, 故

$$\cot \beta = O \left(\frac{1}{a} \right).$$

所以

$$\begin{aligned} \text{分子} &= \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2\sin\nu\pi} \cdot \frac{c(\sqrt{\lambda})^{-\nu}J'_\nu(\sqrt{\lambda}) - (\sqrt{\lambda})^\nu J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda})}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \\ &\quad \left(a^{\nu+\frac{1}{2}\cot\beta} + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)a^{\nu-\frac{1}{2}}\right) + O\left(a^{-\nu+\frac{3}{2}}\right), \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \theta(x, \lambda) &= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi} \left(J_\nu(\sqrt{\lambda}) \frac{(\sqrt{\lambda})^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)} x^{-\nu+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}) \frac{(\sqrt{\lambda})^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} x^{\nu+\frac{1}{2}} \right) + O\left(x^{-\nu+\frac{5}{2}}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{分母} &= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi} \left[\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda})(\sqrt{\lambda})^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)} \left(a^{-\nu+\frac{1}{2}\cot\beta} + \left(-\nu + \frac{1}{2}\right)a^{-\nu+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})(\sqrt{\lambda})^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \left(a^{\nu+\frac{1}{2}\cot\beta} + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)a^{\nu-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &\quad + O\left(a^{-\nu+\frac{5}{2}}|\cot\beta|\right) + O\left(a^{-\nu+\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi} \left[\frac{c(\sqrt{\lambda})^{-\nu}J_\nu(\sqrt{\lambda}) - (\sqrt{\lambda})^\nu J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \left(a^{\nu+\frac{1}{2}\cot\beta} + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)a^{\nu-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &\quad + O\left(a^{-\nu+\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

由于 $0 < \nu < 1$, $-\nu + \frac{3}{2} > \frac{1}{2}$, 而 $\nu - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, 所以当 $a \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{O(a^{-\nu+\frac{3}{2}})}{O(a^{\nu-\frac{1}{2}})} \rightarrow 0.$$

这样便有

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \lim_{a \rightarrow 0} m(\lambda, a, \beta) = -\frac{1}{2} - \sqrt{\lambda} \frac{c(\sqrt{\lambda})^{-\nu}J'_\nu(\sqrt{\lambda}) - (\sqrt{\lambda})^\nu J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda})}{c(\sqrt{\lambda})^{-\nu}J_\nu(\sqrt{\lambda}) - (\sqrt{\lambda})^\nu J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})} \\ &= -\frac{1}{2} - \sqrt{\lambda} \frac{cJ'_\nu(\sqrt{\lambda}) - \lambda^\nu J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda})}{cJ_\nu(\sqrt{\lambda}) - \lambda^\nu J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} J'_\nu(x) &= \alpha_0 x^{\nu-1} + \alpha_1 x^{2+\nu-1} + \cdots - x^{\nu-1}(\alpha_0 + \alpha_1 x^2 + \cdots), \\ J'_{-\nu}(x) &= \beta_0 x^{-\nu-1} + \beta_1 x^{2-\nu-1} + \cdots = x^{-\nu-1}(\beta_0 + \beta_1 x^2 + \cdots), \end{aligned}$$

便知 $M(\lambda)$ 是 $\sqrt{\lambda}$ 的偶函数, 因此是 λ 的单值函数, 当 $c \neq 0$ 和 ∞ 时, $M(\lambda)$ 的极点是 $cJ_\nu(\sqrt{\lambda}) - \lambda^\nu J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})$ 的零点, 记这些零点为 $\{\lambda_n | n = 1, 2, \cdots\}$, 它们就是 T 的特征值, 对应的特征函数是

$$\theta(x, \lambda_n) = \frac{\pi\sqrt{x}}{2\sin\nu\pi} J_\nu(\sqrt{\lambda_n}) \left(J_{-\nu}(\sqrt{\lambda_n}x) - c\lambda_n^{-\nu} J_\nu(\sqrt{\lambda_n}x) \right),$$

$\left\{ \frac{\theta(\cdot, \lambda_n)}{\|\theta(\cdot, \lambda_n)\|} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$ 组成了 $L^2(0, 1]$ 的规范正交基.

当 $c = 0$ 时, 特征值是 $J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})$ 的零点, 特征函数是

$$\frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} J_{\nu}(\sqrt{\lambda_n}) \sqrt{x} J_{-\nu}(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n = 1, 2, \dots.$$

特征展开是 $-\nu$ 阶 Bessel 函数展开. 当 $c = \infty$ 时, $M(\lambda) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\lambda} J'_{\nu}(\sqrt{\lambda})}{J_{\nu}(\sqrt{\lambda})}$. 特征展开就是 Fourier-Bessel 展开 (ν 阶 Bessel 函数展开).

(3) $\nu = 0$ 情形.

与 $0 < \nu < 1$ 情形类似. 设

$$\begin{cases} M\theta = \lambda\theta, \\ \theta(1) = 0, \\ \theta'(1) = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} M\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(1) = 1, \\ \varphi'(1) = 0, \end{cases}$$

则

$$\theta(x, \lambda) = \frac{\pi}{2} \sqrt{x} \left(Y_0(\sqrt{\lambda}) J_0(\sqrt{\lambda} x) - J_0(\sqrt{\lambda}) Y_0(\sqrt{\lambda} x) \right),$$

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2} \theta(x, \lambda) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda} \sqrt{x} \left(Y'_0(\sqrt{\lambda}) J_0(\sqrt{\lambda} x) - J'_0(\sqrt{\lambda}) Y_0(\sqrt{\lambda} x) \right).$$

在 0 点附近,

$$Y_0(\sqrt{\lambda} x) = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} x \right) + O(x^2 |\ln x|), \quad \gamma = -\psi(1),$$

$$Y'_0(\sqrt{\lambda} x) = \frac{2}{\pi \sqrt{\lambda} x} + O(x |\ln x|).$$

故

$$\theta(x, \lambda) = \frac{\pi}{2} \left(Y_0(\sqrt{\lambda}) \sqrt{x} - \frac{2}{\pi} J_0(\sqrt{\lambda}) \sqrt{x} \left(\gamma + \ln \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} x \right) \right) + O\left(x^{\frac{5}{2}} |\ln x|\right),$$

$$\begin{aligned} \theta'(x, \lambda) &= \frac{\pi}{4\sqrt{x}} \left(Y_0(\sqrt{\lambda}) - \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} x \right) J_0(\sqrt{\lambda}) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{x}} J_0(\sqrt{\lambda}) + O\left(x^{\frac{3}{2}} |\ln x|\right), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \cot \beta \theta(a, \lambda) + \theta'(a, \lambda) &= \frac{\pi}{2} \left[\left(Y_0(\sqrt{\lambda}) - \frac{2}{\pi} J_0(\sqrt{\lambda}) \ln \sqrt{\lambda} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} \cot \beta + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - J_0(\sqrt{\lambda}) \left(\frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{a}{2} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} \cot \beta + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{2}{\pi} a^{-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &\quad + O\left(a^{\frac{5}{2}} |\ln a| |\cot \beta|\right) + O\left(a^{\frac{3}{2}} |\ln a|\right). \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\varphi(x, \lambda) &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda} \sqrt{x} \left(Y'_0(\sqrt{\lambda}) - \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} x \right) J'_0(\sqrt{\lambda}) \right) \\ &\quad + O\left(x^{\frac{5}{2}} |\ln x|\right) + \frac{1}{2} \theta(x, \lambda), \\ \varphi'(x, \lambda) &= \frac{\pi \sqrt{\lambda}}{4 \sqrt{x}} \left(Y'_0(\sqrt{\lambda}) - \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} x \right) J'_0(\sqrt{\lambda}) \right) - \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{x}} J'_0(\sqrt{\lambda}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \theta'(x, \lambda) + O\left(x^{\frac{3}{2}} |\ln x|\right),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\cot \beta \varphi(a, \lambda) + \varphi'(a, \lambda) &= \frac{1}{2} (\cot \beta \theta(a, \lambda) + \theta'(a, \lambda)) \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda} \left[\left(Y'_0(\sqrt{\lambda}) - \frac{2}{\pi} \ln \sqrt{\lambda} J'_0(\sqrt{\lambda}) \right) \left(a^{\frac{1}{2}} \cot \beta + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - J'_0(\sqrt{\lambda}) \left(\frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{a}{2} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} \cot \beta + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{2}{\pi} a^{-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &\quad + O\left(a^{\frac{5}{2}} |\ln a| |\cot \beta|\right) + O\left(a^{\frac{3}{2}} |\ln a|\right).\end{aligned}$$

取 c 使得

$$\frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{a}{2} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} \cot \beta + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{2}{\pi} a^{-\frac{1}{2}} - c \left(a^{\frac{1}{2}} \cot \beta + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right),$$

则对固定的 c , 当 a 变时,

$$\cot \beta(a) = \frac{\frac{1}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{a}{2} \right) a^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi} a^{-\frac{1}{2}} - \frac{c}{2} a^{-\frac{1}{2}}}{ca^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{a}{2} \right) a^{\frac{1}{2}}} = O\left(\frac{1}{a}\right),$$

那么

$$\begin{aligned}m(\lambda, a, \beta) &= -\frac{\cot \beta \varphi(a, \lambda) + \varphi'(a, \lambda)}{\cot \beta \theta(a, \lambda) + \theta'(a, \lambda)} = \frac{1}{2} - \sqrt{\lambda} \cdot \\ &\quad \frac{\left(-c J'_0(\sqrt{\lambda}) + Y'_0(\sqrt{\lambda}) - \frac{2}{\pi} J'_0(\sqrt{\lambda}) \ln \sqrt{\lambda} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} \cot \beta + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right) + O\left(a^{\frac{5}{2}} |\ln a| |\cot \beta|\right) + O\left(a^{\frac{3}{2}} |\ln a|\right)}{\left(-c J_0(\sqrt{\lambda}) + Y_0(\sqrt{\lambda}) - \frac{2}{\pi} J_0(\sqrt{\lambda}) \ln \sqrt{\lambda} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} \cot \beta + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right) + O\left(a^{\frac{5}{2}} |\ln a| |\cot \beta|\right) + O\left(a^{\frac{3}{2}} |\ln a|\right)}.\end{aligned}$$

但是

$$a^{\frac{1}{2}} \cot \beta + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{\pi}}{ca^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{a}{2} \right) a^{\frac{1}{2}}}.$$

因此

$$m(\lambda, a, \beta) = -\frac{1}{2} \sqrt{\lambda} \frac{cJ'_0(\sqrt{\lambda}) - Y'_0(\sqrt{\lambda}) + \frac{2}{\pi} J'_0(\sqrt{\lambda}) \ln \sqrt{\lambda} + O(a^2 \ln^2 a)}{cJ_0(\sqrt{\lambda}) - Y_0(\sqrt{\lambda}) + \frac{2}{\pi} J_0(\sqrt{\lambda}) \ln \sqrt{\lambda} + O(a^2 \ln^2 a)},$$

故

$$M(\lambda) = -\frac{1}{2} - \sqrt{\lambda} \frac{cJ'_0(\sqrt{\lambda}) - Y'_0(\sqrt{\lambda}) + \frac{2}{\pi} J'_0(\sqrt{\lambda}) \ln \sqrt{\lambda}}{cJ_0(\sqrt{\lambda}) - Y_0(\sqrt{\lambda}) + \frac{2}{\pi} J_0(\sqrt{\lambda}) \ln \sqrt{\lambda}}.$$

同样地, 它是 λ 的偶函数, $M(\lambda)$ 为半纯函数, 其极点即 $cJ_0(\sqrt{\lambda}) - Y_0(\sqrt{\lambda}) + \frac{2}{\pi} J_0(\sqrt{\lambda}) \ln \sqrt{\lambda}$ 的零点. 算子 T 的纯点谱, 对应的特征函数乃是

$$\theta(x, \lambda_n) = \frac{\pi \sqrt{x}}{2} \left(Y_0(\sqrt{\lambda_n}) J_0(\sqrt{\lambda_n} x) - J_0(\sqrt{\lambda_n}) Y_0(\sqrt{\lambda_n} x) \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

它们组成 $L^2(0, 1]$ 的规范正交基.

4.4.3 $[1, \infty)$ 上 Bessel 微分算子的特征展开

$$M = -D^2 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad x \in [1, \infty).$$

∞ 是 M 的奇型端点.

1. $T_0(M)$ 的自伴延拓

引理 4.4.2 在无穷远附近, 存在正数 r 和实数 α , 使得

$$J_\nu(x) \approx \frac{r}{\sqrt{x}} \sin(x + \alpha).$$

证明 考虑 $\sqrt{x} J_\nu(x)$ 在无穷远处的渐近行为. 设 $y(x) = \sqrt{x} J_\nu(x)$, 则

$$y'(x) = \frac{\frac{1}{2} J_\nu(x) + x J'_\nu(x)}{\sqrt{x}}, \quad y''(x) = \frac{x^2 J''_\nu(x) + x J'_\nu(x) - \frac{1}{4} J_\nu(x)}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

由

$$x^2 J''_\nu(x) + x J'_\nu(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0$$

知

$$y''(x) + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right) y(x) = 0.$$

$\forall x > 0, y(x) \in \mathbf{R}, y(x) \neq 0$, 所以

$$r(x) = \sqrt{y^2(x) + y'^2(x)} > 0, \quad x > 0.$$

于是

$$\begin{cases} y(x) = r(x) \sin \theta(x), \\ y'(x) = r(x) \cos \theta(x), \end{cases}$$

代入得

$$r'(x) \cos \theta(x) - \theta'(x) r(x) \sin \theta(x) + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right) r(x) \sin \theta(x) = 0.$$

而

$$r(x) \cos \theta(x) = r'(x) \sin \theta(x) + \theta'(x) r(x) \cos \theta(x),$$

那么

$$\begin{aligned} r'(x) &= \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} r(x) \cos \theta(x) \sin \theta(x), \\ \theta'(x) &= 1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \sin^2 \theta(x), \end{aligned}$$

故

$$r(x) = r(x_0) e^{\int_{x_0}^x \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \cos \theta(t) \sin \theta(t) dt} > 0.$$

因为

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{t^2} < \infty,$$

所以极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = r > 0$ 存在. 令 $\theta(x) = x + \alpha(x)$, 则

$$1 + \alpha'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2} \sin^2(x + \alpha(x)),$$

$$\alpha'(x) = \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2} \sin^2(x + \alpha(x)).$$

$$\alpha(x) - \alpha(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2} \sin^2(t + \alpha(t)) dt.$$

由此, 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = \alpha$ 也存在. 因为

$$\begin{aligned} |y(x) - r \sin(x + \alpha)| &= |r(x) \sin(x + \alpha(x)) - r \sin(x + \alpha)| \\ &\leq |r(x) - r| + r |\sin(x + \alpha(x)) - \sin(x + \alpha)| \\ &\leq |r(x) - r| + 2r \left| \cos \left(x + \frac{\alpha(x) + \alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha(x) - \alpha}{2} \right| \\ &\leq |r(x) - r| + r |\alpha(x) - \alpha|, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} y(x) &\approx r \sin(x + \alpha), \quad x \rightarrow \infty, \\ J_\nu(x) &\approx \frac{r}{\sqrt{x}} \sin(x + \alpha), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$My = \lambda y$ 的基本解组是 $\{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x), \sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)\}$, 这样便有

$$\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x) \in L^2[1, \infty),$$

所以 $T_0(M)$ 的亏指数是 $(1, 1)$, 算子 $T = T_1(M)|_{\mathcal{D}(T)}$,

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid f(1) = 0\}$$

是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓.

2. $[1, \infty)$ 上的特征展开

引进第三类 Bessel 函数 Hankel 函数

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(t) &= J_\nu(t) + iY_\nu(t) = \frac{J_{-\nu}(t) - e^{i\nu\pi}J_\nu(t)}{i \sin \nu\pi}, \\ H_\nu^{(2)}(t) &= J_\nu(t) - iY_\nu(t) = \frac{J_{-\nu}(t) - e^{i\nu\pi}J_\nu(t)}{-i \sin \nu\pi}. \end{aligned}$$

由 $H_\nu^{(1)}(t)$ 的渐近式 ([1]417 页),

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(t) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{i(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + \nu\right)_n \left(\frac{1}{2} - \nu\right)_n}{n! (i2t)^n} \right], \\ (\lambda)_n &= \lambda(\lambda+1) \cdots (\lambda+n-1), \end{aligned}$$

可得

$$\sqrt{x}H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}}} e^{i(\sqrt{\lambda}x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + \nu\right)_n \left(\frac{1}{2} - \nu\right)_n}{n! (i2\sqrt{\lambda}x)^n} \right],$$

而

$$\left| e^{i(\sqrt{\lambda}x - \frac{\nu^2}{2} - \frac{\pi}{4})} \right| = e^{-\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}x}.$$

当 $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} > 0$ 时, $\sqrt{x}H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}x)$ 是 $My - \lambda y$ 的唯一的平方可积解.

定理 4.4.3 设 $M = -D^2 + q(x)$, $x \in [a, \infty)$, M 在奇型端点是极限点型的, y 是 $My = \lambda y$ 的平方可积非零解, 则 $M(\lambda) = \frac{y'(a, \lambda)}{y(a, \lambda)}$.

证明 属于 $L^2[a, \infty)$ 的线性无关解只有一个, 所以 y 是 Weyl 解的倍数,

$$y(x) = C\psi(x, \lambda) = C(\varphi(x, \lambda) + M(\lambda)\theta(x, \lambda)),$$

那么

$$y(a, \lambda) = C,$$

$$y'(a, \lambda) = C'M(\lambda),$$

故

$$M(\lambda) = \frac{y'(a, \lambda)}{y(a, \lambda)}.$$

这样便得

$$M(\lambda) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\lambda}H_\nu^{(1)'}(\sqrt{\lambda})}{H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda})}.$$

当 $\lambda > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}M(\lambda) - \operatorname{Im}\sqrt{\lambda} \frac{J_\nu'(\sqrt{\lambda}) + iY_\nu'(\sqrt{\lambda})}{J_\nu(\sqrt{\lambda}) + iY_\nu(\sqrt{\lambda})} \\ = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{J_\nu^2(\sqrt{\lambda}) + Y_\nu^2(\sqrt{\lambda})}, \end{aligned}$$

当 $\lambda < 0$ 时, $\sqrt{\lambda} = i\mu$, 由

$$H_\nu^{(1)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-i(\frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} W_{0,\nu}(2e^{-i\frac{\pi}{2}}t),$$

其中, Whittaker 函数 (参见文献 [1]338 页与 417 页)

$$W_{0,\nu}(2e^{-i\frac{\pi}{2}}t) = W_{0,\nu}(-i2t) = \frac{e^{it}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \nu)} \int_0^\infty e^{-s} s^{-\frac{1}{2} + \nu} \left(1 - \frac{s}{i2t}\right)^{-\frac{1}{2} + \nu} ds,$$

可得

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}) - H_\nu^{(1)}(i\mu) &= \sqrt{\frac{2}{\pi i\mu}} e^{-i(\frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \frac{e^{-\mu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} \int_0^\infty e^{-s} s^{-\frac{1}{2} + \nu} \left(1 + \frac{s}{2\mu}\right)^{-\frac{1}{2} + \nu} ds \\ &= \frac{1}{i} e^{-\frac{1}{2}i\nu\pi} g(\mu), \end{aligned}$$

其中, $g(\mu)$ 是个实函数, 故

$$\frac{\sqrt{\lambda}H_{\nu}^{(1)'}(\sqrt{\lambda})}{H_{\nu}^{(1)}(\sqrt{\lambda})} = \mu \frac{g'(\mu)}{g(\mu)},$$

$$\operatorname{Im} M(\lambda) = 0.$$

这样便得

$$d\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{d\lambda}{J_{\nu}^2(\sqrt{\lambda}) + Y_{\nu}^2(\sqrt{\lambda})}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

于是有特征展开

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, \lambda) \left(\int_1^{\infty} f(t) \theta(t, \lambda) dt \right) d\rho(\lambda) \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\pi \sqrt{x}}{2} \cdot \frac{J_{\nu}(\sqrt{\lambda}) Y_{\nu}(\sqrt{\lambda} x) - Y_{\nu}(\sqrt{\lambda}) J_{\nu}(\sqrt{\lambda} x)}{J_{\nu}^2(\sqrt{\lambda}) + Y_{\nu}^2(\sqrt{\lambda})} \cdot \\ &\quad \left(\int_1^{\infty} f(t) \frac{\pi \sqrt{t}}{2} \left(J_{\nu}(\sqrt{\lambda}) Y_{\nu}(\sqrt{\lambda} t) - Y_{\nu}(\sqrt{\lambda}) J_{\nu}(\sqrt{\lambda} t) \right) dt \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sqrt{x} \cdot \frac{(J_{\nu}(\sqrt{\lambda}) Y_{\nu}(\sqrt{\lambda} x) - Y_{\nu}(\sqrt{\lambda}) J_{\nu}(\sqrt{\lambda} x))}{J_{\nu}^2(\sqrt{\lambda}) + Y_{\nu}^2(\sqrt{\lambda})} \cdot \\ &\quad \left(\int_1^{\infty} f(t) \sqrt{t} \left(J_{\nu}(\sqrt{\lambda}) Y_{\nu}(\sqrt{\lambda} t) - Y_{\nu}(\sqrt{\lambda}) J_{\nu}(\sqrt{\lambda} t) \right) dt \right) d\lambda \\ &\quad - \int_0^{\infty} \sqrt{x} \frac{\lambda (J_{\nu}(\lambda) Y_{\nu}(\lambda x) - Y_{\nu}(\lambda) J_{\nu}(\lambda x))}{J_{\nu}^2(\lambda) + Y_{\nu}^2(\lambda)} \\ &\quad \left(\int_1^{\infty} f(t) \sqrt{t} (J_{\nu}(\lambda) Y_{\nu}(\lambda t) - Y_{\nu}(\lambda) J_{\nu}(\lambda t)) dt \right) d\lambda \end{aligned}$$

这就是所谓的 Weber 公式.

4.4.4 $(0, \infty)$ 上 Bessel 微分算子的特征展开

$$M = -D^2 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad x \in (0, \infty).$$

方程 $My = \lambda y$ 的基本解组是 $\{\sqrt{x}J_{\nu}(\sqrt{\lambda}x), \sqrt{x}Y_{\nu}(\sqrt{\lambda}x)\}$, 取 $a \in (0, \infty)$, 设

$$\begin{cases} My_1 = \lambda y_1, \\ y_1(a) = 1, \\ y_1'(a) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} My_2 = \lambda y_2, \\ y_2(a) = 0, \\ y_2'(a) = 1, \end{cases}$$

则

$$y_2(x, \lambda) = \frac{\pi}{2} \sqrt{a} \sqrt{x} \left(J_\nu(\sqrt{\lambda}a) Y_\nu(\sqrt{\lambda}x) - Y_\nu(\sqrt{\lambda}a) J_\nu(\sqrt{\lambda}x) \right),$$

$$y_1(x, \lambda) - \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda a} \sqrt{x} \left(Y'_\nu(\sqrt{\lambda}a) J_\nu(\sqrt{\lambda}x) - J'_\nu(\sqrt{\lambda}a) Y_\nu(\sqrt{\lambda}x) \right) = \frac{1}{2a} y_2(x, \lambda),$$

0 和 ∞ 都是 M 的奇型端点, 当 $\nu \geq 1$ 时, $T_0(M)$ 在 $(0, a]$ 和 $[a, \infty)$ 上的亏指数都是 $(1, 1)$, 所以 $T_0(M)$ 在 $(0, \infty)$ 的亏指数是 $(0, 0)$, $T_0(M)$ 本身是自伴算子. 因为

$$\sqrt{x} J_\nu(\sqrt{\lambda}x) \in L^2(0, a],$$

所以 Weyl 解

$$y_1(x, \lambda) + M_-(\lambda) y_2(x, \lambda) = C \sqrt{x} J_\nu(\sqrt{\lambda}x).$$

让 $x = a$ 得

$$1 = C \sqrt{a} J_\nu(\sqrt{\lambda}a), \quad C = \frac{1}{\sqrt{a} J_\nu(\sqrt{\lambda}a)},$$

$$y_1(x, \lambda) + M_-(\lambda) y_2(x, \lambda) = \frac{\sqrt{x} J_\nu(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{a} J_\nu(\sqrt{\lambda}a)},$$

$$y'_1(x, \lambda) + M_-(\lambda) y'_2(x, \lambda) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda} \sqrt{x} J'_\nu(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{a} J_\nu(\sqrt{\lambda}a)},$$

故

$$M_-(\lambda) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{a}} J_\nu(\sqrt{\lambda}a) + \sqrt{\lambda} \sqrt{a} J'_\nu(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{a} J_\nu(\sqrt{\lambda}a)} = \frac{1}{2a} + \frac{\sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda}a)}{J_\nu(\sqrt{\lambda}a)}.$$

因为 $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} > 0$ 时, $\sqrt{x} H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}x) \in L^2[a, \infty)$, 故

$$y_1(x, \lambda) + M_+(\lambda) y_2(x, \lambda) = C \sqrt{x} H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}x).$$

让 $x = a$ 得

$$C = \frac{1}{\sqrt{a} H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a)},$$

所以

$$y_1(x, \lambda) + M_+(\lambda) y_2(x, \lambda) = \frac{\sqrt{x} H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{a} H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a)}.$$

取导数, 再让 $x = a$, 便得

$$M_+(\lambda) = \frac{1}{2a} + \frac{\sqrt{\lambda} H_\nu^{(1)'}(\sqrt{\lambda}a)}{H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a)},$$

因此

$$\operatorname{Im} M_{11}(\lambda) = \operatorname{Im} \frac{1}{M_-(\lambda) - M_+(\lambda)} - \operatorname{Im} \frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}a)H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{\lambda} \left(J'_\nu(\sqrt{\lambda}a)H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a) - J_\nu(\sqrt{\lambda}a)H_\nu^{(1)'}(\sqrt{\lambda}a) \right)}.$$

而

$$\begin{vmatrix} J_\nu(\sqrt{\lambda}a) & H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a) \\ J'_\nu(\sqrt{\lambda}a) & H_\nu^{(1)'}(\sqrt{\lambda}a) \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} J_\nu(\sqrt{\lambda}a) & Y_\nu(\sqrt{\lambda}a) \\ J'_\nu(\sqrt{\lambda}a) & Y'_\nu(\sqrt{\lambda}a) \end{vmatrix} = i \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}a},$$

故

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} M_{11}(\lambda) &= -\operatorname{Im} \frac{\pi a}{2i} J_\nu(\sqrt{\lambda}a) H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a) \\ &\quad - \operatorname{Im} \frac{\pi a}{2i} J_\nu(\sqrt{\lambda}a) \frac{J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}a) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(\sqrt{\lambda}a)}{\nu \sin \nu\pi} \\ &= \frac{\pi a}{2 \sin \nu\pi} \operatorname{Im} \left(J_\nu(\sqrt{\lambda}a) J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}a) - e^{-i\nu\pi} J_\nu^2(\sqrt{\lambda}a) \right) \\ &= \begin{cases} \frac{\pi a}{2} J_\nu^2(\sqrt{\lambda}a), & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

于是

$$d\rho_{11}(\lambda) = \begin{cases} \frac{a}{2} J_\nu^2(\sqrt{\lambda}a) d\lambda, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

定理 4.4.4 若 $\lim_{\delta \rightarrow 0} M_-(\varepsilon + i\delta) = M_-(\varepsilon)$, 则

$$d\rho_{12}(\lambda) = d\rho_{21}(\lambda) = M_-(\lambda) d\rho_{11}(\lambda), \quad d\rho_{22}(\lambda) = M_-^2(\lambda) d\rho_{11}(\lambda).$$

证明

$$d\rho_{11}(\lambda) = \left(\frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \operatorname{Im} M_{11}(\lambda + i\mu) \right) d\lambda,$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \operatorname{Im} M_{11}(\lambda + i\mu) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{1}{M_-(\lambda + i\mu) - M_+(\lambda + i\mu)} \\ &= \operatorname{Im} \frac{1}{M_-(\lambda) - \lim_{\mu \rightarrow 0} M_+(\lambda + i\mu)} \\ &= \frac{\operatorname{Im} \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} M_+(\lambda + i\mu) \right)}{\left(M_-(\lambda) - \left(\operatorname{Re} \lim_{\mu \rightarrow 0} M_+(\lambda + i\mu) \right) \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \lim_{\mu \rightarrow 0} M_+(\lambda + i\mu) \right)^2}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \lim_{\mu \rightarrow 0} \operatorname{Im} M_{12}(\lambda + i\mu) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{M_-(\lambda + i\mu) + M_+(\lambda + i\mu)}{M_-(\lambda + i\mu) - M_+(\lambda + i\mu)} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{M_-(\lambda) + \lim_{\mu \rightarrow 0} M_+(\lambda + i\mu)}{M_-(\lambda) - \lim_{\mu \rightarrow 0} M_+(\lambda + i\mu)} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{\left(M_-(\lambda) + \operatorname{Re} \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} M_+ \right) + i \operatorname{Im} \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} M_+ \right) \right) \left(M_-(\lambda) - \operatorname{Re} \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} M_+ \right) + i \operatorname{Im} \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} M_+ \right) \right)}{\left(M_-(\lambda) - \operatorname{Re} \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} M_+ \right) \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} M_+ \right) \right)^2} \\
 &= \frac{M_-(\lambda) \cdot \operatorname{Im} \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} M_+(\lambda + i\mu) \right)}{\left(M_-(\lambda) - \operatorname{Re} \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} M_+(\lambda + i\mu) \right) \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} M_+(\lambda + i\mu) \right) \right)^2} \\
 &= M_-(\lambda) \lim_{\mu \rightarrow 0} \operatorname{Im} M_{11}(\lambda + i\mu),
 \end{aligned}$$

故

$$d\rho_{12}(\lambda) = d\rho_{21}(\lambda) = M_-(\lambda) d\rho_{11}(\lambda).$$

类似地, 可得

$$d\rho_{22}(\lambda) = M_-^2(\lambda) d\rho_{11}(\lambda).$$

对我们的问题来说,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\mu \rightarrow 0} M_-(\lambda + i\mu) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2a} + \frac{\sqrt{\lambda + i\mu} J'_\nu(\sqrt{\lambda + i\mu} a)}{J_\nu(\sqrt{\lambda + i\mu} a)} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2a} + \frac{\sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda} a)}{J_\nu(\sqrt{\lambda} a)},
 \end{aligned}$$

所以由定理 4.4.4 便得

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1(x, \lambda) \left(\int_0^{\infty} f(t) y_1(t, \lambda) dt \right) d\rho_{11}(\lambda) \\
 &\quad + y_1(x, \lambda) \left(\int_0^{\infty} f(t) y_2(t, \lambda) dt \right) M_-(\lambda) d\rho_{11}(\lambda) \\
 &\quad + y_2(x, \lambda) \left(\int_0^{\infty} f(t) y_1(t, \lambda) dt \right) M_-(\lambda) d\rho_{11}(\lambda) \\
 &\quad + y_2(x, \lambda) \left(\int_0^{\infty} f(t) y_2(t, \lambda) dt \right) M_-^2(\lambda) d\rho_{11}(\lambda) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1(x, \lambda) \left(\int_0^{\infty} f(t) (y_1(t, \lambda) + M_-(\lambda) y_2(t, \lambda)) dt \right) d\rho_{11}(\lambda) \\
 &\quad + M_-(\lambda) y_2(x, \lambda) \left(\int_0^{\infty} f(t) (y_1(t, \lambda) + M_-(\lambda) y_2(t, \lambda)) dt \right) d\rho_{11}(\lambda)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} (y_1(x, \lambda) + M_-(\lambda)y_2(x, \lambda)) \left(\int_0^{\infty} f(t)(y_1(x, \lambda) + M_-(\lambda)y_2(x, \lambda)) dt \right) d\rho_{11}(\lambda) \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}J_{\nu}(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{a}J_{\nu}(\sqrt{\lambda}a)} \left(\int_0^{\infty} f(t) \frac{\sqrt{t}J_{\nu}(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{a}J_{\nu}(\sqrt{\lambda}a)} dt \right) \frac{a}{2} J_{\nu}^2(\sqrt{\lambda}a) d\lambda \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sqrt{x}J_{\nu}(\sqrt{\lambda}x) \left(\int_0^{\infty} f(t)\sqrt{t}J_{\nu}(\sqrt{\lambda}t) dt \right) d\lambda \\
&= \int_0^{\infty} \lambda \sqrt{x}J_{\nu}(\lambda x) \left(\int_0^{\infty} f(t)\sqrt{t}J_{\nu}(\lambda t) dt \right) d\lambda,
\end{aligned}$$

这就是 $(0, \infty)$ 上的特征展开 —— Hankel 公式.

类似的方法可以考虑 $0 \leq \nu < 1$ 情形.

4.5 Hermite 微分算式

$$M = -D^2 + x^2, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$\pm\infty$ 是 M 的两个奇型端点, 因为 $q(x) = x^2$ 下有界, M 在这两个奇型端点处都是极限点型的, 由 Kodaira 公式, $T_0(M)$ 的亏指数是 $(0, 0)$, 这说明 $T_0(M)$ 本身是自伴算子.

4.5.1 Weyl 函数的计算

定理 4.5.1 设 $M = -D^2 + q(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, 如果 $q(x)$ 是偶函数, 则

$$M_+(\lambda) = -M_-(\lambda).$$

证明 如果 $y(x)$ 是 $My = \lambda y$ 的解, 则 $y(-x)$ 也是解. 若

$$\begin{cases} My_1 = \lambda y_1, \\ y_1(0) = 1, \\ y_1'(0) = 0, \end{cases}$$

则 $h(x) = y_1(-x)$ 也满足它, 所以 $y_1(x) = y_1(-x)$, y_1 是偶函数. 同理, 若

$$\begin{cases} My_2 = \lambda y_2, \\ y_2(0) = 0, \\ y_2'(0) = 1, \end{cases}$$

则 $k(x) = -y_2(-x)$ 也是此 Cauchy 问题的解, 故 $y_2(x) = -y_2(-x)$, y_2 是奇函数. 这样便可以取特殊的 a, b, β, γ ,

$$a = -b, \quad \beta = -\gamma.$$

于是

$$m_{-b}(\lambda) = -\frac{\cot\beta y_1(-b, \lambda) + y_1'(-b, \lambda)}{\cot\beta y_2(-b, \lambda) + y_2'(-b, \lambda)} = \frac{\cot\gamma y_1(b, \lambda) + y_1'(b, \lambda)}{\cot\gamma y_2(b, \lambda) + y_2'(b, \lambda)} - m_b(\lambda),$$

因此

$$M_+(\lambda) = -M_-(\lambda).$$

由于 Hermite 微分算式的 $q(x) = x^2$ 是偶函数, $M_-(\lambda) = -M_+(\lambda)$, 只需计算 $M_+(\lambda)$ 即可. 因为 M 在 ∞ 处是极限点型的, 所以

$$M_+(\lambda) = \frac{y'(0)}{y(0)}.$$

这里 y 是方程 $My - \lambda y$ 的平方可积非零解. 对方程 $My - \lambda y$ 作变换

$$z = e^{\frac{x^2}{2}} y,$$

则

$$\begin{aligned} y &= e^{-\frac{x^2}{2}} z, \\ y' &= e^{-\frac{x^2}{2}} z' - x e^{-\frac{x^2}{2}} z, \\ y'' &= e^{-\frac{x^2}{2}} z'' - 2x e^{-\frac{x^2}{2}} z' - e^{-\frac{x^2}{2}} z + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} z, \end{aligned}$$

代入方程得

$$z'' - 2xz' + (\lambda - 1)z = 0.$$

下面考虑围道积分

$$z(x) = \int_C e^{-x\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} d\zeta,$$

其中, 曲线 C 如图 4.1 所示.

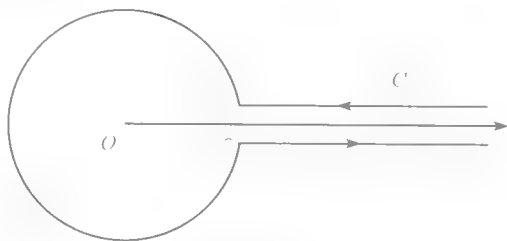


图 4.1

$$\zeta^{\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} = e^{(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}) \ln \zeta}.$$

取 $\ln \zeta$ 的一个分支, 使得它在右半轴上为实值. 由于 $e^{-x\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}}$ 在 C 包含的区域内解析

$$z''(x) - 2xz'(x) + (\lambda - 1)z(x) = \int_C e^{-x\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} (\zeta^2 + 2x\zeta + (\lambda - 1)) d\zeta,$$

可是

$$\frac{d}{d\zeta} \left(e^{-x\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{2} e^{-x\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} (\zeta^2 + 2x\zeta + (\lambda - 1)),$$

故

$$z'' - 2xz + (\lambda - 1)z = \int_C -2 \frac{d}{d\zeta} \left(e^{-x\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} \right) d\zeta = 0,$$

于是

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_C e^{-x\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} d\zeta,$$

而

$$\frac{|y(x)|}{e^{-\frac{x^2}{2}+x}} = \left| \frac{1}{e^x} \int_C e^{-x\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} d\zeta \right| = \left| \int_C e^{-x(\zeta+1) - \frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} d\zeta \right|.$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x(t+1) - \frac{1}{4}t^2} t^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} dt &< \infty, \\ \int_0^{2\pi} \varepsilon^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} e^{-x\varepsilon \cos \varphi - x - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \cos 2\varphi} \varepsilon d\varphi &< \infty, \end{aligned}$$

所以

$$|y(x)| = O\left(e^{-\frac{x^2}{2}+x}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

因而

$$y \in L^2[0, \infty),$$

故

$$M_+(\lambda) = \frac{y'(0, \lambda)}{y(0, \lambda)} = -\frac{\int_C e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} d\zeta}{\int_C e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} d\zeta}.$$

ζ 绕 0 转一圈,

$$\zeta^{-\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}} \rightarrow (e^{i2\pi})^{-\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}}.$$

让 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得

$$\begin{aligned} M_+(\lambda) &= \frac{-\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} d\zeta + \int_0^\infty e^{i2\pi(-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2})} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} d\zeta}{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} d\zeta - \int_0^\infty e^{i2\pi(-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2})} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} d\zeta} \\ &= -\frac{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} \left(e^{i2\pi(-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2})} - 1 \right) d\zeta}{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} \left(e^{i2\pi(-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2})} - 1 \right) d\zeta} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}} d\zeta}{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} d\zeta}.$$

可是

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} dt \stackrel{t=\frac{1}{4}\zeta^2}{=} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \left(\frac{\zeta^2}{4}\right)^{\lambda-1} \frac{1}{2}\zeta d\zeta \\ &= \frac{2}{4^\lambda} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{2\lambda-1} d\zeta,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}\right) &= \frac{2}{4^{\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} d\zeta, \\ \Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right) &= \frac{2}{4^{\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}} d\zeta,\end{aligned}$$

故

$$M_+(\lambda) = -\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}, \quad M_-(\lambda) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)},$$

那么

$$\begin{aligned}M_{11}(\lambda) &= \frac{1}{M_-(\lambda) - M_+(\lambda)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}, \\ M_{12}(\lambda) &= M_{21}(\lambda) = 0, \\ M_{22}(\lambda) &= \frac{M_-(\lambda)M_+(\lambda)}{M_-(\lambda) - M_+(\lambda)} = -\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}.\end{aligned}$$

$\Gamma(\lambda)$ 没有零点, 它的简单极点是 $0, -1, -2, \dots$, 所以 $M_{11}(\lambda)$ 有简单极点

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4} &= 0, -1, -2, \dots, \\ \lambda &= 4n+1, \quad n=0, 1, 2, \dots.\end{aligned}$$

而 $M_{22}(\lambda)$ 有简单极点

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4} &= 0, -1, -2, \dots, \\ \lambda &= 4n+3, \quad n=0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

这表示 $\sigma(T_0(M)) = \sigma_p(T_0(M)) = \{2n+1 \mid n=0, 1, 2, \dots\}$, 而特征展开为

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1(x, \lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) y_1(t, \lambda) dt \right) d\rho_{11}(\lambda) \\
&\quad + y_2(x, \lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) y_2(t, \lambda) dt \right) d\rho_{22}(\lambda) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n y_1(x, 4n+1) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) y_1(t, 4n+1) dt \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_2(x, 4n+3) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) y_2(t, 4n+3) dt, \quad f \in L^2(-\infty, \infty).
\end{aligned}$$

4.5.2 Hermite 展开

为了将展开式具体化, 需要求对应于特征值的特征函数. 由于 $x=0$ 是方程

$$z'' - 2xz' + (\lambda - 1)z = 0$$

的正常点, 故按 Fuchs 理论, 它有形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的解. 代入方程得

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + (\lambda - 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

故

$$2a_2 + (\lambda - 1)a_0 = 0,$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + (\lambda - 1)a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

即

$$a_{n+2} = \frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

当 $\lambda = 2n+1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 时, $z(x)$ 是一个 n 阶多项式, 于是得

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} z(x),$$

它是平方可积的, 是对应于 $\lambda = 2n+1$ 的特征函数, 记之为

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),$$

通常称作 Hermite 函数, 不难算得

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12.
\end{aligned}$$

于是展开式变成

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) dt \right) e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad f \in L^2(-\infty, \infty),$$

C_n 与 f 无关. 为确定起见, 取 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)$ 可得

$$C_m \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{t^2}{2}} H_m(t) \right|^2 dt = 1,$$

故

$$C_m = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{t^2}{2}} H_m(t) \right|^2 dt}.$$

由于

$$\begin{aligned} H_m'' - 2xH_m' + 2mH_m &= 0, \\ e^{-x^2} H_m'' - 2xe^{-x^2} H_m' + 2me^{-x^2} H_m &= 0, \end{aligned}$$

即

$$-(e^{-x^2} H_m')' = 2me^{-x^2} H_m,$$

另外考虑展开式

$$\psi(x, t) = e^{-t^2 + 2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(x)}{n!} t^n,$$

由

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 2t\psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= (-2t + 2x)\psi, \end{aligned}$$

从展开式可得

$$C_n'(x) = 2nC_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

和

$$C_{n+1}(x) - 2xC_n(x) + 2nC_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

即

$$C_{n+1} - 2xC_n + C_n' = 0,$$

于是

$$\begin{aligned} C_{n+1}' - 2C_n - 2xC_n' + C_n'' &= 0, \\ C_n'' - 2xC_n' + 2nC_n &= 0, \end{aligned}$$

这表明 $C_n = H_n$, 因而有递推公式

$$H_m' = 2mH_{m-1},$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{t^2}{2}} H_m(t) \right|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_m^2(t) dt = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} - \left(e^{-t^2} H'_m(t) \right)' H_m(t) dt \\ &= \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_m'^2(t) dt = 2m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_{m-1}^2(t) dt \\ &= \cdots = 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_0^2(t) dt = 2^m m! \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) dt \right) e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad f \in L^2(-\infty, \infty).$$

而 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \mid n = 0, 1, 2, \dots \right\}$ 是 $L^2(-\infty, \infty)$ 的规范正交基. 这就是所谓的 Hermite 展开.

4.6 Laguerre 微分算式

$$M = -D^2 + \frac{x^2}{16} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2}, \quad x \in [0, \infty).$$

表面上看, 0 和 ∞ 都是奇型端点.

4.6.1 $T_0(M)$ 的亏指数

令 $t = \frac{x^2}{4}$, $y(t) = x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} u(x)$, 则

$$u'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} y - \frac{1}{4} x^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} y + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} \dot{y},$$

$$\begin{aligned} u''(x) &= \frac{1}{4} x^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} \ddot{y} + x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} \dot{y} - \frac{1}{4} x^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} \dot{y} - \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} y \\ &\quad - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} y + \frac{1}{16} x^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} y. \end{aligned}$$

$Mu = \lambda u$ 变成

$$-\frac{1}{4} x^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} \ddot{y} - x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} \dot{y} + \frac{1}{4} x^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} \dot{y} = \lambda x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} y,$$

即

$$t\ddot{y} + (1-t)\dot{y} + \lambda y = 0, \quad t \in [0, \infty).$$

这便是常说的 Laguerre 方程.

按照 Fuchs 理论, $t = 0$ 是正则奇点, 指标方程是

$$\rho(\rho - 1) + \rho = 0, \text{ 即 } \rho^2 = 0,$$

所以一个解是

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_nt^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n = 0,$$

比较系数得

$$a_{n+1} = \frac{n-\lambda}{(n+1)^2} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

所以

$$a_n = \frac{(-\lambda)(-\lambda+1)\cdots(-\lambda+n-1)}{n!^2} a_0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

根据系数的递推关系, 当 n 充分大时, a_n 同号, 不妨假定都是正的, 则当 $n \geq N$ 时,

$$a_{n+1} > \frac{c}{n+1} a_n, \quad c > \frac{1}{2},$$

那么

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{\infty} a_k t^k &> a_N t^N + \frac{c}{N+1} a_N t^{N+1} + \frac{c^2}{(N+1)(N+2)} a_N t^{N+2} + \dots \\ &= a_N N! c^{-N} \left(\frac{(ct)^N}{N!} + \frac{(ct)^{N+1}}{(N+1)!} + \dots \right), \end{aligned}$$

这表示

$$\begin{aligned} y_1 &= O(e^{ct}), \\ u_1(x) &= x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} y_1 \left(\frac{x^2}{4} \right) = O\left(\sqrt{x} e^{\frac{cx^2}{4} - \frac{x^2}{8}}\right), \end{aligned}$$

所以当 x 充分大时, $u_1(x) > 1$, 因此

$$u_1 \in L^2(0, \infty), \text{ 但 } u_1 \notin L^2(, \infty).$$

考虑方程的与 u_1 线性无关的解, 由 Fuchs 理论知与 y_1 线性无关的另一解为

$$\begin{aligned}
 y_2 &= y_1 \int^t z(s) ds, \\
 \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 \int^t z(s) ds + y_1 z, \\
 \ddot{y}_2 &= \ddot{y}_1 \int^t z(s) ds + 2\dot{y}_1 z + y_1 \dot{z},
 \end{aligned}$$

代入方程得

$$\begin{aligned}
 t y_1 \dot{z} + (1-t) y_1 z + 2t \dot{y}_1 z &= 0, \\
 \dot{z} + \left(\frac{1-t}{t} + \frac{2\dot{y}_1}{y_1} \right) z &= 0.
 \end{aligned}$$

解得

$$z = \frac{1}{t} e^t \frac{1}{y_1^2(t)}.$$

故

$$y_2 = y_1(t) \int^t \frac{e^s}{s y_1^2(s)} ds.$$

由于

$$\frac{e^t}{t y_1^2(t)} \sim \frac{1}{t}, \quad t \rightarrow 0,$$

故

$$y_2(t) \sim \ln t, \quad t \rightarrow 0,$$

$$u_2(x) = x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} y_2 \left(\frac{x^2}{4} \right) \sim x^{\frac{1}{2}} \ln x, \quad x \rightarrow 0,$$

$u_2 \in L^2(0, \infty)$. 由此可知 0 点为极限圆型, 其实 0 是个正常的点, 而 ∞ 处为极限点型. 所以 $T_0(M)$ 的亏指数是 $(1, 1)$, 它的自伴延拓的定义域由 $\mathcal{D}(T_1(M))$ 中满足一个在 ∞ 处的边界条件界定.

4.6.2 $T_0(M)$ 的自伴延拓 T 有纯点谱

引理 4.6.1 设 $M = -D^2 + q(x)$, $x \in [0, \infty)$, 其中, $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = +\infty$, 则对任何 λ , 方程 $My = \lambda y$ 的非零解 $y(x, \lambda)$ 都只有有限个零点.

证明 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = +\infty$, 所以对任何 λ , 有 x_λ 使得

$$\lambda - q(x) < 0, \quad x \in [x_\lambda, \infty).$$

于是由 Sturm 比较定理, $y(x, \lambda)$ 在 $[x_\lambda, \infty)$ 上至多只有一个零点. 可是由解的存在唯一定理, 非零解 $y(x, \lambda)$ 在 $[0, x_\lambda)$ 上也只有有限个零点, 故得.

定理 4.6.1 设 $M = -D^2 + q(x)$, $x \in [0, \infty)$, 其中, $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = +\infty$, 则 $T_0(M)$ 的任何自伴延拓 T 都有纯点谱.

证明 $\forall b > 0$, 在 $[0, b]$ 上考虑自伴算子

$$T_b = T_1(M)|_{\mathcal{D}(T_b)},$$

$$\mathcal{D}(T_b) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) \mid \sin \alpha f(0) - \cos \alpha f'(0) = 0, \cos \beta f(b) - \sin \beta f'(b) = 0\}.$$

给定有限区间 Δ , 设 T_b 在 Δ 里的特征值个数为 $N_b(\Delta)$, 如果集合

$$\{N_b(\Delta) \mid b > 0\} \text{ 无界,}$$

由于 $\sigma(T_b) = \sigma_p(T_b) = \{\lambda_n^{(b)} \mid n = 1, 2, \dots\}$, 按 Sturm 振动定理, 对应于 $\lambda_n^{(b)}$ 的特征函数 $y_n^{(b)}(x, \lambda_n^{(b)})$ 恰有 n 个零点, 于是会有这样的 λ , λ 在 Δ 的右边, 使得 $My = \lambda y$ 的解 $y(x, \lambda)$ 的零点有无穷多个, 矛盾! 所以必有常数 C_Δ , 使得

$$N_b(\Delta) \leq C_\Delta, \quad b > 0.$$

设 $\rho_b(\lambda)$ 是对应于 T_b 的谱函数, 它的跃点是 $\lambda_n^{(b)}$, 所以 $\rho_b(\lambda)$ 在 Δ 里的跃点个数 $\leq C_\Delta$, 故 $\rho(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{b_n}(\lambda)$ 在 Δ 上也只有有限个增加点, 这表示 T 有纯点谱.

4.6.3 $T_0(M)$ 的自伴延拓 T 的特征值与特征函数

由 4.6.1 小节中 $y_1(t)$ 系数的递推关系, 如果 $\lambda = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 则 $y_1(t)$ 是一个 n 阶多项式. 因为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-n+n-1)(-n+n-2)\cdots(-n+1)(-n)}{n!^2} a_0 = \frac{(-1)^n}{n!} a_0, \\ a_{n-1} &= \frac{n^2}{n-1-n} a_n = (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \frac{1}{(n-1)!} a_0, \\ a_{n-2} &= \frac{(n-1)^2}{n-2-n} a_{n-1} = (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \frac{1}{(n-2)!} a_0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

所以

$$y_1(t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^n + \binom{n}{1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} + \binom{n}{2} \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} t^{n-2} + \cdots + 1.$$

由于

$$\begin{aligned} e^t (t^n e^{-t})^{(n)} &= e^t \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-k+1) t^{n-k} e^{-t} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-k+1) t^{n-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{(n(n-1) \cdots (n-k+1))^2}{k!} t^{n-k} \\
&= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \frac{n^2}{1!} t^{n-1} + (-1)^{n-2} \frac{n^2(n-1)^2}{2!} t^{n-2} + \cdots + n! \\
&= n! \left(\frac{(-1)^n}{n!} t^n + \binom{n}{1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} + \binom{n}{2} \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} t^{n-2} + \cdots + 1 \right),
\end{aligned}$$

记

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t (t^n e^{-t})^{(n)},$$

称其为 Laguerre 多项式, 不难算得

$$L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = -t + 1, \quad L_2(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 2),$$

$$L_3(t) = \frac{1}{6}(-t^3 + 9t^2 - 18t + 6), \quad L_4(t) = \frac{1}{24}(t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24),$$

因为 $n > k$ 时,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^k e^{-t} L_n(t) dt &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty (t^k e^{-t}) e^t (t^n e^{-t})^{(n)} dt \\
&= \frac{k}{n!} \int_0^\infty t^{k-1} (t^n e^{-t})^{(n-1)} dt \\
&= \cdots = \frac{(-1)^k k!}{n!} \int_0^\infty (t^n e^{-t})^{(n-k)} dt = 0,
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^\infty e^{-t} L_n^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{(-1)^n t^n}{n!^2} (t^n e^{-t})^{(n)} dt = \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = 1.$$

于是

$$\left\{ e^{-\frac{t}{2}} L_n(t) \mid n = 0, 1, 2, \cdots \right\}, \quad \text{即} \quad \left\{ \sqrt{\frac{x}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} L_n\left(\frac{x^2}{4}\right) \mid n = 0, 1, 2, \cdots \right\}$$

是 $L^2[0, \infty)$ 的规范正交基. 特征展开是

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \left(\int_0^\infty f(t) \sqrt{\frac{t}{2}} e^{-\frac{t^2}{8}} L_n\left(\frac{t^2}{4}\right) dt \right) \sqrt{\frac{x}{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} L_n\left(\frac{x^2}{4}\right), \quad f \in L^2[0, \infty).$$

第5章 奇型任意阶情形自伴微分算子的谱论

现在考虑任意阶的对称微分算式

$$M = \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k, \quad x \in (a, b)$$

在 $L^2(a, b)$ 生成的最小算子 $T_0(M)$ 的自伴延拓的谱分解. 这里 $p_k(x)$ 是复值函数 $p_k \in C^k(a, b)$ 且 $p_n(x) \neq 0, x \in (a, b)$.

5.1 展开式定理与 Parseval 等式

仍然考虑用有限区间去逼近区间 (a, b) . 设 $\delta = [\tilde{a}, \tilde{b}] \subset (a, b)$, T_δ 是 $T_0(M|_\delta)$ 的自伴延拓, 其定义域为

$$\mathcal{D}(T_\delta) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M|_\delta)) | U_\delta f = 0\},$$

这里 $U_\delta f = 0$ 表示刻画 $\mathcal{D}(T_\delta)$ 的边条件

$$U_{\delta j} f \equiv \sum_{k=1}^n \left(M_{\delta j k} f^{(k-1)}(\tilde{a}) + N_{\delta j k} f^{(k-1)}(\tilde{b}) \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

设 $\{\lambda_{\delta k} | k = 1, 2, \dots\}$ 是 T_δ 的谱集, 相应于 $\lambda_{\delta k}$ 的规范化特征函数是 $\varphi_{\delta k}$, $\{\varphi_{\delta k} | k = 1, 2, \dots\}$ 组成了 $L^2(\delta)$ 的规范正交基, 对任何的 $u \in L^2(\delta)$ 都有 Parseval 等式

$$\|u\|_\delta^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, \varphi_{\delta k})_\delta|^2,$$

$$\|u\|_\delta^2 = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |u(x)|^2 dx,$$

$$(u, \varphi_{\delta k})_\delta = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} u(x) \overline{\varphi_{\delta k}(x)} dx,$$

取 $c \in (\tilde{a}, \tilde{b})$, 设 $\chi_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2, \dots, n$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} My = \lambda y, \\ y^{(k-1)}(c, \lambda) = \delta_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

的解, 它们是线性无关的, 所以

$$\varphi_{\delta k} = \sum_{j=1}^n r_{\delta k j} \chi_j(\cdot, \lambda_{\delta k}).$$

于是

$$\begin{aligned} \|u\|_{\delta}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |(u, \varphi_{\delta k})_{\delta}|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^n \overline{r_{\delta k s}} \int_{\delta} u(x) \overline{\chi_s(x, \lambda_{\delta k})} dx \right) \overline{\left(\sum_{t=1}^n \overline{r_{\delta k t}} \int_{\delta} u(\tau) \overline{\chi_t(\tau, \lambda_{\delta k})} d\tau \right)}. \end{aligned}$$

令

$$g_{\delta j}(\lambda) = \int_{\delta} u(x) \overline{\chi_j(x, \lambda)} dx,$$

则

$$\begin{aligned} \|u\|_{\delta}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^n \overline{r_{\delta k s}} g_{\delta s}(\lambda_{\delta k}) \right) \overline{\left(\sum_{t=1}^n \overline{r_{\delta k t}} g_{\delta t}(\lambda_{\delta k}) \right)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n g_{\delta s}(\lambda_{\delta k}) \overline{g_{\delta t}(\lambda_{\delta k})} \overline{r_{\delta k s}} \overline{r_{\delta k t}} \\ &= \sum_{s,t=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} g_{\delta s}(\lambda_{\delta k}) \overline{g_{\delta t}(\lambda_{\delta k})} \overline{r_{\delta k s}} \overline{r_{\delta k t}}, \end{aligned}$$

在实轴上定义阶梯函数 $\rho_{\delta ts}$, $s, t = 1, \dots, n$ 如下:

$$\rho_{\delta ts}(\lambda_{\delta k} + 0) - \rho_{\delta ts}(\lambda_{\delta k} - 0) = \sum_{\substack{\lambda_{\delta m} \\ \text{对 } m \text{ 求和}}}^{\lambda_{\delta m}} \overline{r_{\delta m t}} \overline{r_{\delta m s}},$$

特征值 $\lambda_{\delta k}$ 是这些阶梯函数的间断点, 不妨假设 $\rho_{\delta ts}$ 是右连续的且 $\rho_{\delta ts}(0) = 0$.

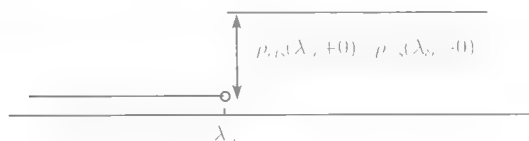


图 5.1

于是

$$\|u\|_{\delta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n g_{\delta s}(\lambda) \overline{g_{\delta t}(\lambda)} d\rho_{\delta ts}(\lambda).$$

记 $\rho_{\delta} = (\rho_{\delta ts}(\lambda))$, 这个矩阵有下列性质:

(1) ρ_δ 是 Hermite 矩阵,

$$\overline{\rho_{\delta ts}(\lambda)} = \overline{\sum_{\lambda_{\delta m} \leq \lambda} r_{\delta mt} \overline{r_{\delta ms}}} = \sum_{\lambda_{\delta m} \leq \lambda} r_{\delta ms} \overline{r_{\delta mt}} = \rho_{\delta st}(\lambda);$$

(2) 如果 $\Delta = (\lambda, \mu]$, 则 $\rho_\delta(\Delta) = \rho_\delta(\mu) - \rho_\delta(\lambda)$ 非负定,

$$\rho_\delta(\Delta) = (\rho_{\delta ts}(\Delta)), \rho_{\delta ts}(\Delta) = \sum_{\lambda < \lambda_{\delta m} \leq \mu} r_{\delta mt} \overline{r_{\delta ms}},$$

$$\begin{aligned} (\rho_\delta(\Delta)x, x) &= (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})(\rho_{\delta ts}(\Delta)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{t,s=1}^n \rho_{\delta ts}(\Delta) x_s \overline{x_t} \\ &= \sum_{\lambda < \lambda_{\delta m} \leq \mu} \left(\sum_{t,s=1}^n r_{\delta mt} \overline{r_{\delta ms}} x_s \overline{x_t} \right) \\ &= \sum_{\lambda < \lambda_{\delta m} \leq \mu} \left| \sum_{t=1}^n r_{\delta mt} \overline{x_t} \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(3) 在 λ 的每个有限区间上, 特征值没有有限聚点, 故 $\rho_{\delta ts}(\lambda)$ 是有限的阶梯函数, 因而是有界变差的.

当 $\delta \rightarrow (a, b)$ 时, ρ_δ 是否有极限?

定理 5.1.1 (Levitan, 1950) 设 (1) $\{\delta\}$ 是一串趋于 (a, b) 的闭子区间;

(2) $U_\delta f = 0$ 是对应于自伴延拓 T_δ 的定义域的边界条件,

则从 $\{\delta\}$ 中可以取出一个子序列 $\{\delta_j\}$, 使得

$$j \rightarrow \infty, \delta_j \rightarrow (a, b), \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \rho_{\delta_j}(\lambda) = \rho(\lambda).$$

矩阵 $\rho(\lambda)$ 也具有上面提到的 $\rho_\delta(\lambda)$ 具有的 3 条性质.

证明 (1) 对任何的 $\mu > 0$, 存在与 δ 和 U_δ 无关的常数 $M(\mu)$, 使得对一切闭子区间 δ 和 $1 \leq t, s \leq n$ 都有 $\int_{-\mu}^{\mu} |\mathrm{d}\rho_{\delta ts}(\lambda)| \leq M(\mu)$.

(i) 只要证明 $\int_{-\mu}^{\mu} \mathrm{d}\rho_{\delta tt}(\lambda) \leq M(\mu)$ 即可.

因为

$$2 \left| \sum_{\lambda_{\delta m} = \lambda_{\delta l}, \text{对 } m \text{ 求和}} r_{\delta mt} \overline{r_{\delta ms}} \right| \leq \sum_{\lambda_{\delta m} = \lambda_{\delta l}} (|r_{\delta mt}|^2 + |r_{\delta ms}|^2),$$

所以

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\mu}^{\mu} |\mathrm{d}\rho_{\delta ts}(\lambda)| &= 2 \sum_{-\mu \leq \lambda_{\delta m} \leq \mu} |r_{\delta mt} \overline{r_{\delta ms}}| \leq \sum_{-\mu \leq \lambda_{\delta m} \leq \mu} (|r_{\delta mt}|^2 + |r_{\delta ms}|^2) \\ &= \int_{-\mu}^{\mu} \mathrm{d}\rho_{\delta tt}(\lambda) + \int_{-\mu}^{\mu} \mathrm{d}\rho_{\delta ss}(\lambda). \end{aligned}$$

$$(ii) \int_{-\mu}^{\mu} \mathrm{d}\rho_{\delta tt}(\lambda) \leq M(\mu).$$

$\chi_j^{(k-1)}(x, \lambda)$ 在 $|x - c| \leq \xi, |\lambda| \leq \mu$ 上连续, 而 $\chi_j^{(k-1)}(c, \lambda) = \delta_{jk}$. 对于每个 $\lambda_0 \in [-\mu, \mu]$, 存在 h_{λ_0} 与 η_{λ_0} , 使得 $c \leq x \leq c + h_{\lambda_0}, |\lambda - \lambda_0| \leq \eta_{\lambda_0}$ 时,

$$|\chi_j^{(k-1)}(x, \lambda) - \delta_{jk}| < \frac{1}{6n^2}.$$

$\{(\lambda_0 - \eta_{\lambda_0}, \lambda_0 + \eta_{\lambda_0}) | \lambda_0 \in [-\mu, \mu]\}$ 盖住了 $[-\mu, \mu]$, 利用有限覆盖定理, 可知存在 $h \geq 0$, 使得当 $c \leq x \leq c + h$ 时, 对一切 $\lambda \in [-\mu, \mu]$ 都有

$$|\chi_j^{(k-1)}(x, \lambda) - \delta_{jk}| < \frac{1}{6n^2}.$$

取 $\tilde{f}(x)$ 非负, $\tilde{f} \in C^\infty(a, b)$, $\text{supp } \tilde{f} \subset (c, c + h)$ 且 $\int_c^{c+h} \tilde{f}(x) \mathrm{d}x = 1$. 对函数 $(-1)^{m-1} \tilde{f}^{(m-1)}(x)$ 用 Bessel 不等式得

$$\|(-1)^{m-1} \tilde{f}^{(m-1)}\|_\delta^2 \geq \sum_{l=1}^k |((-1)^{m-1} \tilde{f}^{(m-1)}, \varphi_{\delta l})_\delta|^2.$$

设右边只含有那些特征值在 $[-\mu, \mu]$ 内的特征函数, 于是改写得

$$\int_c^{c+h} |\tilde{f}^{(m-1)}(x)|^2 \mathrm{d}x \geq \int_{-\mu}^{\mu} \sum_{s,l=1}^n g_{\delta s}(\lambda) \overline{g_{\delta t}(\lambda)} \mathrm{d}\rho_{\delta ts}(\lambda).$$

其中,

$$\begin{aligned} g_{\delta s}(\lambda) &= \int_c^{c+h} (-1)^{m-1} \tilde{f}^{(m-1)}(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} \mathrm{d}x \\ &= \int_c^{c+h} \tilde{f}(x) \overline{\chi_s^{(m-1)}(x, \lambda)} \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

于是对一切 $\lambda \in [-\mu, \mu]$,

$$\begin{aligned} |g_{\delta s}(\lambda) - \delta_{sm}| &= \left| \int_c^{c+h} \tilde{f}(x) \overline{\chi_s^{(m-1)}(x, \lambda)} \mathrm{d}x - \int_c^{c+h} \delta_{sm} \tilde{f}(x) \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \int_c^{c+h} \tilde{f}(x) |\chi_s^{(m-1)}(x, \lambda) - \delta_{sm}| \mathrm{d}x \leq \frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\mu}^{\mu} \sum_{s,t=1}^m g_{\delta s}(\lambda) \overline{g_{\delta t}(\lambda)} d\rho_{\delta ts}(\lambda) \\
 & \geq \int_{-\mu}^{\mu} |g_{\delta m}(\lambda)|^2 d\rho_{\delta mm}(\lambda) - \int_{-\mu}^{\mu} \sum_{s \text{ 或 } t \neq m} |g_{\delta s}(\lambda)| |g_{\delta t}(\lambda)| d\rho_{\delta ts}(\lambda) \\
 & \geq \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right)^2 \int_{-\mu}^{\mu} d\rho_{\delta mm}(\lambda) - \frac{1}{2} \int_{-\mu}^{\mu} \sum_{s \text{ 或 } t \neq m} |g_{\delta s}(\lambda)| |g_{\delta t}(\lambda)| (d\rho_{\delta ss}(\lambda) + d\rho_{\delta tt}(\lambda)) \\
 & \geq \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right)^2 \int_{-\mu}^{\mu} d\rho_{\delta mm}(\lambda) - \int_{-\mu}^{\mu} \sum_{t \neq m} \sum_{s=1}^n |g_{\delta s}(\lambda)| |g_{\delta t}(\lambda)| d\rho_{\delta ss}(\lambda) \\
 & \geq \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right)^2 \int_{-\mu}^{\mu} d\rho_{\delta mm}(\lambda) - \frac{n-1}{6n^2} \int_{-\mu}^{\mu} \sum_{s=1}^n |g_{\delta s}(\lambda)| d\rho_{\delta ss}(\lambda), \\
 & \quad \left(\text{因为 } |g_{\delta s}(\lambda)| \leq \frac{1}{6n^2} \right) \\
 & \geq \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right)^2 \int_{-\mu}^{\mu} d\rho_{\delta mm}(\lambda) - \frac{n-1}{6n^2} \left(1 + \frac{1}{6n^2}\right) \int_{-\mu}^{\mu} \sum_{s=1}^n d\rho_{\delta ss}(\lambda),
 \end{aligned}$$

由于 $n \geq 1$, $\frac{1}{6n^2} < \frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{6n^2} \left(1 + \frac{1}{6n^2}\right) < \frac{n-1}{6n^2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4n}$, 故

$$\text{上式} \geq \frac{1}{2} \int_{-\mu}^{\mu} d\rho_{\delta mm}(\lambda) - \frac{1}{4n} \int_{-\mu}^{\mu} \sum_{s=1}^n d\rho_{\delta ss}(\lambda),$$

将对应于 $m = 1, 2, \dots, n$ 的不等式加起来便得

$$\frac{1}{2} \int_{-\mu}^{\mu} \sum_{m=1}^n d\rho_{\delta mm}(\lambda) - \frac{1}{4} \int_{-\mu}^{\mu} \sum_{s=1}^n d\rho_{\delta ss}(\lambda) \leq \sum_{m=1}^n \int_c^{c+h} \left| \tilde{f}^{(m-1)}(x) \right|^2 dx,$$

即

$$\int_{-\mu}^{\mu} \sum_{m=1}^n d\rho_{\delta mm}(\lambda) \leq 4 \sum_{m=1}^n \int_c^{c+h} \left| \tilde{f}^{(m-1)}(x) \right|^2 dx = M(\mu), \quad h \text{ 与 } \mu \text{ 是有关的!}$$

(2) 根据 Helly 选择定理, 存在子序列 $\{\delta_j\}$, 使得

$$j \rightarrow \infty, \quad \delta_j \rightarrow (a, b), \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \rho_{\delta_j}(\lambda) = \rho(\lambda).$$

当然, 极限矩阵 $\rho(\lambda)$ 也具有每个 $\rho_{\delta}(\lambda)$ 所具有的那 3 条性质.

考虑空间 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$.

$$L^2_\rho(-\infty, \infty) = \left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \mid g_s(\lambda) \text{ 是 } \rho \text{ 可测函数且 } \|\mathbf{g}\|_\rho^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n g_s(\lambda) \overline{g_t(\lambda)} d\rho_{ts}(\lambda) < \infty \right\}$$

(由于 $\rho(\lambda)$ 具有的性质 (2), 这个积分定义了一个内积!).

定理 5.1.2 设 ρ 是定理 5.1.1 里确定的极限矩阵. 对任何 $f \in L^2(a, b)$, 存在 $\mathbf{g} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 使得若

$$g_{\delta_j s}(\lambda) = \int_{\delta_j} f(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx, \quad s = 1, \dots, n,$$

则

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}_{\delta_j} - \mathbf{g}\|_\rho = 0$$

且有 Parseval 等式

$$\|f\| = \|\mathbf{g}\|_\rho,$$

和展开式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda),$$

等式在 $L^2(a, b)$ 收敛意义下成立. 这里 $g_l(\lambda)$ 是 \mathbf{g} 的分量. 把它记成 $\int_a^b f(x) \overline{\chi_t(x, \lambda)} dx$.

证明 这个证明与定理 3.8.1 与定理 3.8.2 的证明类似.

(1) Parseval 等式.

(i) 设 $f \in C_0^\infty(a, b)$.

对于充分大的 j , $\text{supp } f \subset \delta_j$. 于是

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n g_{\delta_j s}(\lambda) \overline{g_{\delta_j t}(\lambda)} d\rho_{\delta_j ts}(\lambda),$$

其中,

$$g_{\delta_j s}(\lambda) = \int_a^b f(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx (= g_s(\lambda))$$

(积分存在, 是 λ 的连续函数). 利用 δ_j 上的 Green 公式得

$$\int_a^b M f(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx = \int_a^b f(x) \overline{M \chi_s(x, \lambda)} dx = \overline{\lambda} \int_a^b f(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx = \overline{\lambda} g_{\delta_j s}(\lambda),$$

所以

$$\int_a^b |Mf(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 \sum_{s,t=1}^n g_{\delta_j s}(\lambda) \overline{g_{\delta_j t}(\lambda)} d\rho_{\delta_j ts}(\lambda).$$

于是, 由 $\rho_{\delta_j}(\lambda)$ 的性质 (2),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right) \sum_{s,t=1}^n g_{\delta_j s}(\lambda) \overline{g_{\delta_j t}(\lambda)} d\rho_{\delta_j ts}(\lambda) \\ &\leq \frac{1}{A^2} \left[\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right) |\lambda|^2 \sum_{s,t=1}^n g_{\delta_j s}(\lambda) \overline{g_{\delta_j t}(\lambda)} d\rho_{\delta_j ts}(\lambda) \right] \\ &\leq \frac{1}{A^2} \int_a^b |Mf(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

这说明积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n g_{\delta_j s}(\lambda) \overline{g_{\delta_j t}(\lambda)} d\rho_{\delta_j ts}(\lambda)$ 的收敛性关于 j 是一致成立的. 在不等式

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b |f(x)|^2 dx - \int_{-A}^A \sum_{s,t=1}^n g_{\delta_j s}(\lambda) \overline{g_{\delta_j t}(\lambda)} d\rho_{\delta_j ts}(\lambda) \right| \\ &= \left| \left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right) \sum_{s,t=1}^n g_{\delta_j s}(\lambda) \overline{g_{\delta_j t}(\lambda)} d\rho_{\delta_j ts}(\lambda) \right| \\ &\leq \frac{1}{A^2} \int_a^b |Mf(x)|^2 dx \end{aligned}$$

中让 $j \rightarrow \infty$, 利用 Helly 积分定理可得

$$\left| \int_a^b |f(x)|^2 dx - \int_{-A}^A \sum_{s,t=1}^n g_s(\lambda) \overline{g_t(\lambda)} d\rho_{ts}(\lambda) \right| \leq \frac{1}{A^2} \int_a^b |Mf(x)|^2 dx.$$

再让 $A \rightarrow \infty$ 便得

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n g_s(\lambda) \overline{g_t(\lambda)} d\rho_{ts}(\lambda) = \|g\|_{\rho}^2.$$

(ii) 设 $f \in L^2(a, b)$, $\text{supp } f$ 紧.

由 Friedrichs 软化定理, 存在 $\{f_m\} \subset C_0^{\infty}(a, b)$, 使得 $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\| = 0$, 那么

$$\begin{aligned} \|f_m - f_l\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n (g_s^{(m)}(\lambda) - g_s^{(l)}(\lambda)) \overline{(g_t^{(m)}(\lambda) - g_t^{(l)}(\lambda))} d\rho_{ts}(\lambda) \\ &= \|g^{(m)} - g^{(l)}\|_{\rho}^2, \end{aligned}$$

其中,

$$g_s^{(m)}(\lambda) = \int_a^b f_m(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

(积分存在, 是 λ 的连续函数). 因为 $\{f_m\}$ 是基本列, $\{g^{(m)}\}$ 也是基本列, 由 $L_\rho^2(-\infty, \infty)$ 的完备性, 存在 $g \in L_\rho^2(-\infty, \infty)$, 使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|g^{(m)} - g\|_\rho = 0.$$

于是

$$\|f\|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|g^{(m)}\|_\rho^2 = \|g\|_\rho^2.$$

因为 f 只是在有限区间上不为零, $g_s^{(m)}(\lambda)$ 的积分仅在有限区间上进行. 在此区间上用 Schwarz 不等式, 注意到强收敛必弱收敛, 故得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_s^{(m)}(\lambda) = \int_a^b f(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

再利用 Riesz 定理, 平均收敛可取到子列 p.p. 收敛, 故

$$g_s(\lambda) = \int_a^b f(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

(iii) 设 $f \in L^2(a, b)$.

令

$$f_\Delta(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Delta, \\ 0, & x \in (a, b) \setminus \Delta, \end{cases}$$

则

$$g_s^{(\Delta)}(\lambda) = \int_a^b f_\Delta(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx = \int_\Delta f(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

由

$$\|g^{(\Delta)} - g^{(\Delta')}\|_\rho^2 \leq \|f_\Delta - f_{\Delta'}\|^2$$

知 $\{g^{(\Delta)}\}$ 是基本列, 存在 $g \in L_\rho^2(-\infty, \infty)$, 使得

$$\lim_{\Delta \rightarrow (a, b)} \|g^{(\Delta)} - g\|_\rho = 0.$$

于是

$$\|f\|^2 = \lim_{\Delta \rightarrow (a, b)} \|f_\Delta\|^2 = \lim_{\Delta \rightarrow (a, b)} \|g^{(\Delta)}\|_\rho^2 = \|g\|_\rho^2.$$

而等式

$$g_s(\lambda) = \int_a^b f(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

按 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 收敛意义成立.

(2) 展开式 (特征展开)

$$f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda),$$

等式在 $L^2(a, b)$ 收敛意义下成立.

由前面证明的 Parseval 等式, 利用极化恒等式

$$4f_1\overline{f_2} = |f_1 + f_2|^2 - |f_1 - f_2|^2 + i(|f_1 + if_2|^2 - |f_1 - if_2|^2)$$

可得广义 Parseval 等式

$$\int_a^b f_1(x) \overline{f_2(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n g_s^{(1)}(\lambda) \overline{g_t^{(2)}(\lambda)} d\rho_{ts}(\lambda),$$

其中,

$$g_s^{(i)}(\lambda) = \int_a^b f_i(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx, \quad i = 1, 2; s = 1, 2, \dots, n$$

记

$$f_A(x) = \int_{-A}^A \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda),$$

由于积分在有限区间上进行, 这是一个 x 的连续函数. 设 $P \in L^2(a, b)$, $\text{supp} P$ 紧, 按 (1), 与 P 对应的 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 的元素记为 Q . 因为 $\text{supp} P$ 紧, 下述积分有意义:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_A(x) \overline{P(x)} dx &= \int_a^b \left(\int_{-A}^A \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) \right) \overline{P(x)} dx \\ &= \int_{-A}^A \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \left(\int_a^b \overline{P(x)} \chi_s(x, \lambda) dx \right) d\rho_{st}(\lambda) \\ &= \int_{-A}^A \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{Q_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda). \end{aligned}$$

另一方面, 由广义 Parseval 等式

$$\int_a^b f(x) \overline{P(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n g_s(\lambda) \overline{Q_t(\lambda)} d\rho_{ts}(\lambda),$$

于是

$$\int_a^b (f(x) - f_A(x)) \overline{P(x)} dx = \left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right) \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{Q_s(\lambda)} d\rho_{ts}(\lambda).$$

利用 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_a^b (f(x) - f_A(x)) \overline{P(x)} dx \right|^2 \\
 & \leq \left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right) \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{g_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda) \cdot \left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right) \sum_{s,t=1}^n Q_t(\lambda) \overline{Q_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda) \\
 & \leq \left[\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right) \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{g_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n Q_t(\lambda) \overline{Q_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda) \\
 & = \left[\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right) \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{g_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda) \right] \int_a^b |P(x)|^2 dx.
 \end{aligned}$$

取

$$P(x) = \begin{cases} f(x) - f_A(x), & x \in [\alpha, \beta] \subset (a, b), \\ 0, & x \in (a, b) \setminus [\alpha, \beta], \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - f_A(x)|^2 dx \right|^2 \\
 & \leq \left[\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right) \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{g_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda) \right] \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - f_A(x)|^2 dx,
 \end{aligned}$$

即

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - f_A(x)|^2 dx \leq \left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right) \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{g_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda).$$

右边与 α, β 无关, 所以当 $\alpha \searrow a, \beta \nearrow b$ 时, 可得

$$\int_a^b |f(x) - f_A(x)|^2 dx \leq \left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right) \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{g_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda).$$

这样当 $A \rightarrow \infty$ 便有

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \|f - f_A\|^2 = 0,$$

故

$$f(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} f_A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda),$$

等式按 $L^2(a, b)$ 收敛意义成立.

5.2 逆变换定理, 谱矩阵的唯一性

从 5.1 节中可知 $\sigma: L^2(a, b) \rightarrow L^2_\rho(-\infty, \infty)$, $\sigma f = g$ 是一个等距线性映射, 它是一个酉映射吗? 即 σ 是否为满射?

引理 5.2.1(Levinson) 设 $g \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n g_s(\lambda) \overline{g_t(\lambda)} d\rho_{ts}(\lambda) < \infty,$$

令 $f_A(x) = \int_{-A}^A \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda)$ (这是一个 x 的连续函数!), 则存在 $f \in L^2(a, b)$, 使得在 $L^2(a, b)$ 收敛意义下,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} f_A = f$$

且

$$\|f\|^2 \leq \|g\|_\rho^2.$$

证明 设 $P \in L^2(a, b)$, $\text{supp } P$ 紧, $G \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 是它对应的元素.

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{P(x)} f_A(x) dx &= \int_a^b \left(\int_{-A}^A \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) \right) \overline{P(x)} dx \\ &= \int_{-A}^A \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \left(\int_a^b \chi_s(x, \lambda) \overline{P(x)} dx \right) d\rho_{st}(\lambda) \\ &= \int_{-A}^A \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{G_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda), \end{aligned}$$

当 $B > A$ 时,

$$\int_a^b (f_B(\lambda) - f_A(x)) \overline{P(x)} dx = \left(\int_B^{-A} + \int_A^B \right) \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{G_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda),$$

于是

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b (f_B(\lambda) - f_A(x)) \overline{P(x)} dx \right|^2 \\ & \leq \left(\int_{-B}^{-A} \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{G_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda) \right) \left(\int_B^A \sum_{s,t=1}^n G_t(\lambda) \overline{G_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_A^B \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{g_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda) \right) \left(\int_A^B \sum_{s,t=1}^n G_t(\lambda) \overline{G_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda) \right) \\
& \leq \left(\int_{-B}^{-A} + \int_A^B \right) \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{g_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda) \cdot \int_a^b |P(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

令

$$P(x) = \begin{cases} f_B(x) - f_A(x), & x \in [\alpha, \beta] \subset (a, b), \\ 0, & x \in (a, b) \setminus [\alpha, \beta], \end{cases}$$

则得

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\alpha}^{\beta} |f_B(x) - f_A(x)|^2 dx \right|^2 \\
& \leq \left(\int_{-B}^{-A} + \int_A^B \right) \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{g_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda) \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |f_B(x) - f_A(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

所以

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f_B(x) - f_A(x)|^2 dx \leq \left(\int_{-B}^{-A} + \int_A^B \right) \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{g_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda)$$

(如果取 $A = 0$, 则 $f_B \in L^2(a, b)$!) 上式右边与 α, β 无关, 故

$$\int_a^b |f_B(x) - f_A(x)|^2 dx \leq \left(\int_{-B}^{-A} + \int_A^B \right) \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda) \overline{g_s(\lambda)} d\rho_{st}(\lambda).$$

这表示 $\{f_A\}$ 是 $L^2(a, b)$ 的基本列, 所以存在 $f \in L^2(a, b)$ 使得

$$\lim_{A \rightarrow \infty} f_A = f.$$

如果在前面的不等式中取 $A = 0$, 让 $B \rightarrow \infty$, 则有 $\|f\|^2 \leq \|g\|_{\rho}^2$.

所以在 $L^2(a, b)$ 收敛意义下,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda).$$

还需要

引理 5.2.2 设对某个 μ , $\operatorname{Im} \mu \neq 0$, 方程

$$My = \mu y$$

在 $L^2(a, b)$ 中没有非零解. $f \in L^2(a, b), g \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 满足

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda),$$

等式按 $L^2(a, b)$ 收敛意义成立, 则方程

$$My - \mu y = f$$

在 $L^2(a, b)$ 中有唯一解

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{\lambda - \mu} g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda),$$

等式也是按 $L^2(a, b)$ 收敛意义成立.

证明 (1) F 的存在性.

对 λ 的有限区间 Δ , 令

$$\begin{aligned} f_\Delta(x) &= \int_{\Delta} \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda), \\ F_\Delta(x) &= \int_{\Delta} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{\lambda - \mu} g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda), \end{aligned}$$

由于 Δ 有限, 显然有

$$(M - \mu)F_\Delta = f_\Delta,$$

按假定

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} f_\Delta = f,$$

而 $\left| \frac{1}{\lambda - \mu} \right| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \mu|^2}$, 故 $\frac{g}{\lambda - \mu} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 根据 Levinson 引理, 存在 $F \in L^2(a, b)$, 使得

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} F_\Delta = F.$$

(2) F 是解.

因为

$$(M - \mu)F_\Delta = f_\Delta,$$

由常数变易法, 存在连续函数 $\theta_s(x), s = 1, 2, \dots, n$, 使得

$$F_\Delta(x) = \sum_{s=1}^n C_s(\Delta) \chi_s(x, \mu) + \sum_{s=1}^n \chi_s(x, \mu) \int_c^x \theta_s(\tau) f_\Delta(\tau) d\tau,$$

其中, $c \in (a, b)$ 是初值选取处, $C_s(\Delta) (s = 1, 2, \dots, n)$ 是常数. 对固定的 x ,

$$\left| \int_c^x \theta_s(\tau) f_\Delta(\tau) d\tau - \int_c^x \theta_s(\tau) f(\tau) d\tau \right| \leq \left(\int_c^x |\theta_s(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|f_\Delta - f\| \rightarrow 0,$$

而 F_Δ 在 $L^2(a, b)$ 中收敛到 F . 由 Riesz 定理, 存在 Δ 的子列, 使 F_Δ 几乎处处收敛到 F , 所以存在 Δ 的子列, 使得对几乎一切 x ,

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \sum_{s=1}^n C_s(\Delta) \chi_s(x, \mu) \text{ 存在.}$$

但是 $C_s(\Delta), s = 1, 2, \dots, n$ 与 x 无关, 而 $\chi_s(x, \mu), s = 1, 2, \dots, n$ 线性无关, 在有限维空间里, 收敛就是坐标收敛, 故

$$C_s(\infty) = \lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} C_s(\Delta), \quad s = 1, 2, \dots, n$$

存在. 这样对几乎一切 x 便有

$$F(x) = \sum_{s=1}^n C_s(\infty) \chi_s(x, \mu) + \sum_{s=1}^n \chi_s(x, \mu) \int_c^x \theta_s(\tau) f(\tau) d\tau.$$

右边是 x 的连续函数, 所以上述等式点点成立. 显然, 这就是常数变易法得到的公式. 因此 F 是方程

$$(M - \mu)y = f$$

的解.

(3) F 唯一.

因为 $F \in L^2(a, b)$, 所以如果解不唯一, 则 $(M - \mu)y = 0$ 将有非零的 $L^2(a, b)$ 解, 这是不可能的.

定理 5.2.1 设方程

$$(M \pm i)y = 0$$

没有非零的 $L^2(a, b)$ 解. 对任何 $g \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 存在 $f \in L^2(a, b)$ 使得在 $L^2(a, b)$ 度量下,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda),$$

其中,

$$g_t(\lambda) = \int_a^b f(x) \overline{\chi_t(x, \lambda)} dx, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

等式按 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 的度量成立.

注 在 $n = 2$ 时, 方程 $(M \pm i)y = 0$ 没有平方可积的非零解意味着算子 $T_0(M)$ 在 a 与 b 都是极限点的, 它的亏指数是 $(0, 0)$, $T_0(M)$ 本身就是自伴的. 所以在这种情形下, $\sigma: L^2(a, b) \rightarrow L^2_\rho(-\infty, \infty)$, $\sigma f = g$ 是一个酉映射. 但是这种情形究竟对应着 $T_0(M)$ 的什么样的自伴延拓, 并不是清楚的.

证明 (1) f 的存在性可由 Levinson 引理得到, 由定理 5.1.2, 对这个 f , 又存在 $\tilde{g} \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 使得若记

$$g_{\delta_j s}(\lambda) = \int_{\delta_j} f(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

则

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|g_{\delta_j} - \tilde{g}\|_\rho = 0$$

且

$$\|f\| = \|\tilde{g}\|_\rho.$$

同时若记

$$\tilde{f}_\Delta(x) = \int_\Delta \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) \tilde{g}_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda).$$

则有

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \|\tilde{f}_\Delta - f\| = 0.$$

下面要证明的是 $\|g - \tilde{g}\|_\rho = 0$.

(2) 根据 Levinson 引理, 若记

$$f_\Delta(x) = \int_\Delta \sum_{s,t=1}^n \chi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda),$$

则

$$\lim_{\Delta \rightarrow (-\infty, \infty)} \|f_\Delta - f\| = 0.$$

由引理 5.2.2, 方程

$$(M - i)y = f$$

在 $L^2(a, b)$ 中有唯一解 F , 其形状为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{\lambda - i} g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda)$$

或

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{\lambda - i} \tilde{g}_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda).$$

类似地, 由于

$$\frac{g}{\lambda-i}, \frac{\tilde{g}}{\lambda-i} \in L^2_\rho(-\infty, \infty),$$

所以方程

$$(M-i)y = F$$

在 $L^2(a, b)$ 中也有唯一解

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{\lambda-i} \frac{g_t(\lambda)}{\lambda-i}(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{\lambda-i} \frac{\tilde{g}_t(\lambda)}{\lambda-i} d\rho_{st}(\lambda). \end{aligned}$$

照此下去, 由于

$$\frac{g}{(\lambda-i)^p}, \frac{\tilde{g}}{(\lambda-i)^p} \in L^2_\rho(-\infty, \infty),$$

故方程

$$(M-i)y = F_{p-1}, \quad p \geq 2$$

在 $L^2(a, b)$ 中有唯一解

$$\begin{aligned} F_p(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{(\lambda-i)^{p+1}} g_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{(\lambda-i)^{p+1}} \tilde{g}_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda), \end{aligned}$$

于是得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{(\lambda-i)^p} r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) = 0, \quad p = 1, 2, \dots,$$

这里 $r = g - \tilde{g}$, $r_t(\lambda) = g_t(\lambda) - \tilde{g}_t(\lambda)$.

(3) 取

$$f(x) = \chi_{[c, c+w]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [c, c+w], \\ 0, & x \notin [c, c+w], \end{cases}$$

则 $f \in L^2(a, b)$, 按定理 5.1.2, 记它对应的元素为 $\Gamma \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 则

$$\Gamma_s(\lambda, w) = \int_c^{c+w} \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx.$$

由 (2), 在 $L^2(a, b)$ 中,

$$\int_{\Delta} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{(\lambda-i)^p} r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) \rightarrow 0, \quad p = 1, 2, \dots,$$

所以对 $f(x) = \chi_{[c, c+w]}$, 它弱收敛到 0, 即

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) \left(\int_{\Delta} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{(\lambda - i)^p} r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) \right) dx \\ &= \int_{\Delta} \sum_{s,t=1}^n \frac{1}{(\lambda - i)^p} \overline{\Gamma_s(\lambda, w)} r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

也就是说,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\overline{\Gamma_s(\lambda, w)}}{(\lambda - i)^p} r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) = 0, \quad p = 1, 2, \dots.$$

由于 $r \in L^2_{\rho}(-\infty, \infty)$, $\Gamma \in L^2_{\rho}(-\infty, \infty)$, 所以当 $\operatorname{Im} \mu > 0$ 时, 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\overline{\Gamma_s(\lambda, w)}}{\lambda - \mu} r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) = H(\mu)$$

有意义, 并且是上半平面的解析函数 $\left(\left| \frac{1}{\lambda - \mu} \right| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \mu|} \right)$. 因为在 i 的邻域内,

$$|\lambda - \mu| \geq \frac{1}{2},$$

$$\left| \sum_{s,t=1}^n \frac{\overline{\Gamma_s(\lambda, w)}}{(\lambda - \mu)^p} r_t(\lambda) \right| \leq 2^p \sum_{s,t=1}^n |\overline{\Gamma_s(\lambda, w)}| |r_t(\lambda)|,$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n |\Gamma_s(\lambda, w)| |r_t(\lambda)| d\rho_{st}(\lambda) < \infty \text{ (绝对可积!)},$$

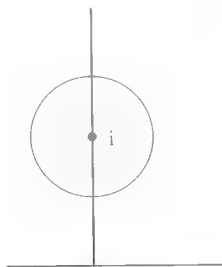


图 5.2

所以在 i 的邻域内, 积分关于 μ 是一致收敛的, 可以在积分号下求导数, 这样由

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\overline{\Gamma_s(\lambda, w)}}{(\lambda - i)^p} r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) = 0, \quad p = 1, 2, \dots,$$

便知 $H(\mu)$ 在点 i 本身及任意阶导数均为零. 这样由解析函数唯一性定理得

$$H(\mu) = 0, \quad \operatorname{Im} \mu > 0.$$

类似地, 对下半平面也有相同的结果.

(4) 设 $\mu = \xi + i\eta, \eta > 0$, 因为

$$\frac{1}{\lambda - \mu} - \frac{1}{\lambda - \bar{\mu}} = \frac{2i\eta}{(\lambda - \xi)^2 + \eta^2},$$

由 $H(\mu) = H(\bar{\mu}) = 0$, 得

$$\eta \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\overline{\Gamma_s(\lambda, w)} r_t(\lambda)}{(\lambda - \xi)^2 + \eta^2} d\rho_{st}(\lambda) = 0.$$

当 λ_1, λ_2 为 ρ 的连续点时, 考虑积分

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \eta \sum_{s,t=1}^n \frac{\overline{\Gamma_s(\lambda, w)} r_t(\lambda)}{(\lambda - \xi)^2 + \eta^2} d\rho_{st}(\lambda) = 0,$$

由于积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n |\Gamma_s(\lambda, w)| |r_t(\lambda)| \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\eta}{(\lambda - \xi)^2 + \eta^2} d\xi \right) d\rho_{st}(\lambda)$$

存在, 可以交换积分次序, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \overline{\Gamma_s(\lambda, w)} r_t(\lambda) \left(\arctan \frac{\lambda_2 - \lambda}{\eta} - \arctan \frac{\lambda_1 - \lambda}{\eta} \right) d\rho_{st}(\lambda) = 0,$$

让 $\eta \rightarrow +0$. 利用 Lebesgue 控制收敛定理. 注意到 λ_1, λ_2 是 ρ 的连续点, 单点集 $\{\lambda_1\}, \{\lambda_2\}$ 的 Lebesgue-Stieltjes 测度为零, 故得

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{s,t=1}^n \overline{\Gamma_s(\lambda, w)} r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) = 0.$$

对 w 求导数得

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{s,t=1}^n \chi_s(c + w, \lambda) r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) = 0,$$

逐次对 w 求导数, 然后让 $w = 0$, 利用

$$\chi_s^{(t-1)}(c, \lambda) = \delta_{st}, \quad s, t = 1, 2, \dots, n,$$

便得

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{t=1}^n r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

(5) 设 ζ 是 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 里 ρ 唯一的间断点, 对

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{t=1}^n r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

让 $\lambda_1 \rightarrow \zeta - 0, \lambda_2 \rightarrow \zeta + 0$ 得

$$\int_{\{\zeta\}} \sum_{t=1}^n r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

所以对任何 $\lambda_1 < \lambda_2$, 有

$$\int_{[\lambda_1, \lambda_2] \text{ 或 } [\lambda_1, \lambda_2), (\lambda_1, \lambda_2], (\lambda_1, \lambda_2)} \sum_{t=1}^n r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

这样对任何的阶梯函数 $\gamma \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, 便有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \gamma_s(\lambda) r_t(\lambda) d\rho_{st}(\lambda) = 0.$$

由于阶梯函数在 $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ 中稠, 故

$$\|\gamma\|_\rho = 0.$$

定理 5.2.2 设方程

$$(M \pm i)y = 0$$

没有非零的 $L^2(a, b)$ 解, 则谱矩阵是唯一的. 即若还有另一个 $\tilde{\rho}$ 也使得定理 5.1.2 成立, 则在 ρ 和 $\tilde{\rho}$ 共同的连续点 λ_1, λ_2 上, 有

$$\tilde{\rho}(\lambda_2) - \tilde{\rho}(\lambda_1) = \rho(\lambda_2) - \rho(\lambda_1).$$

注 这就是说在 ρ 的连续点 λ_1, λ_2 处, 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\rho_{\delta_j}(\lambda_2) - \rho_{\delta_j}(\lambda_1)) = \rho(\lambda_2) - \rho(\lambda_1),$$

不管边条件 $U_{\delta_j} f = 0$ 如何取法!

证明 令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & c \leq x \leq c + w, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则 $f \in L^2(a, b)$, 设对应的元素是 $\Gamma \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$,

$$\Gamma_s(\lambda, w) = \int_c^{c+w} \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx.$$

由引理 5.2.2, 方程

$$(M - i)y = f$$

有唯一属于 $L^2(a, b)$ 的解

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{\lambda - i} \Gamma_t(\lambda, w) d\rho_{st}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x, \lambda)}{\lambda - i} \Gamma_t(\lambda, w) d\tilde{\rho}_{st}(\lambda).$$

令 $\sigma = \rho - \tilde{\rho}$, $\sigma_{st}(\lambda) = \rho_{st}(\lambda) - \tilde{\rho}_{st}(\lambda)$, 则与定理 5.2.1 的证明一样可得

$$H(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \frac{\overline{\Gamma_s(\lambda, \tilde{w})}}{\lambda - \mu} \Gamma_t(\lambda, w) d\sigma_{st}(\lambda)$$

在上下半平面为零. 于是

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{t=1}^n \Gamma_t(\lambda, w) d\sigma_{st}(\lambda) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

对 w 求导得

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{t=1}^n \overline{\chi_t(c+w, \lambda)} d\sigma_{st}(\lambda) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

逐次对 w 求导, 然后让 $w = 0$, 利用 $\chi_s^{(t-1)}(c, \lambda) = \delta_{st}$ 可得

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\sigma_{st}(\lambda) = 0, \quad s, t = 1, 2, \dots, n,$$

即

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\rho_{st}(\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\tilde{\rho}_{st}(\lambda), \quad s, t = 1, 2, \dots, n.$$

故

$$\rho(\lambda_2) - \rho(\lambda_1) = \tilde{\rho}(\lambda_2) - \tilde{\rho}(\lambda_1).$$

考虑使定理 5.2.1 和定理 5.2.2 成立的另一种情形. 假使 a, b 中有一点是正则的, 如 a 是一个正则点, 考虑 $[a, b)$, 则

$$\delta = [a, \tilde{b}],$$

假定在 a 点给了 m 个线性无关的边界条件

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} f^{(j-1)}(a) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

这些条件与 \tilde{b} 选取无关, 即与 δ 无关, 把它记作

$$U^{(1)}f = 0,$$

假设可以再附上 $n - m$ 边界条件 (与 δ 有关), 记为

$$U_{\delta}^{(2)}f = 0,$$

使得算子 T_{δ}

$$\mathcal{D}(T_{\delta}) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M|_{\delta})) | U_{\delta}f = 0 (U^{(1)}f = 0, U_{\delta}^{(2)}f = 0)\},$$

$$T_{\delta}f = Mf, \quad f \in D(T_{\delta})$$

是 $T_0(M|_{\delta})$ 的自伴延拓. 存在着边值问题

$$\begin{cases} My = \lambda y, \\ U^{(1)}y = 0 \end{cases}$$

的 $n - m$ 个线性无关的解

$$\varphi_k(x, \lambda), \quad k = 1, 2, \dots, n - m.$$

这一点可以这样来作: 取一个非退化的 $n \times n$ 矩阵 $R = (r_{jk})$, 假定它的前 m 行, 即

$$\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{m1} & \cdots & M_{mn} \end{pmatrix},$$

设

$$\epsilon_{m+k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} m \text{ 个},$$

——第 $m + k$ 行

设 $v^{(k)}$ 是方程

$$Rv^{(k)} = \varepsilon_{m+k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-m$$

的解,

$$v^{(k)} = \begin{pmatrix} v_1^{(k)} \\ \vdots \\ v_n^{(k)} \end{pmatrix},$$

令

$$\varphi_k(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n v_j^{(k)} \chi_j(x, \lambda), \quad k = 1, 2, \dots, n-m,$$

其中, $\chi_j(x, \lambda)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} My = \lambda y, \\ y^{(k-1)}(a) = \delta_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

的解. 则

$$\varphi_k^{(j-1)}(a, \lambda) = v_j^{(k)}, \quad \text{与 } \lambda \text{ 无关!}$$

于是

$$U_\delta \varphi_k = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{m1} & \cdots & M_{mn} \\ & * & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(k)} \\ \vdots \\ v_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \end{pmatrix},$$

即

$$U^{(1)} \varphi_k = 0, \quad k = 1, \dots, n-m.$$

由于 R 是非退化的, 而 $\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_n$ 线性无关. 故 $v^{(1)}, \dots, v^{(n-m)}$ 线性无关. 因此 $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ 是

$$\begin{cases} My = \lambda y, \\ U^{(1)}y = 0 \end{cases}$$

的 $n-m$ 个线性无关的解. 此外还有

$$\sum_{j=1}^n r_{m+l,j} v_j^{(k)} = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \dots, n-m.$$

这样任何一个特征函数 $\psi_{\delta j}$,

$$\begin{cases} M\psi_{\delta j} = \lambda_{\delta j} \psi_{\delta j}, \\ U_\delta \psi_{\delta j} = 0. \end{cases}$$

因为满足 $U^{(1)}\psi_{\delta j} = 0$, 而 $v^{(1)}, \dots, v^{(n-m)}$ 是方程

$$\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{m1} & \cdots & M_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

的基本解组, 所以

$$\begin{pmatrix} \psi_{\delta j}(a) \\ \vdots \\ \psi_{\delta j}^{(n-1)}(a) \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n-m} C_{\delta jl} \begin{pmatrix} v_1^{(l)} \\ \vdots \\ v_n^{(l)} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n-m} C_{\delta jl} \begin{pmatrix} \varphi_k(a) \\ \vdots \\ \varphi_k^{(n-1)}(a) \end{pmatrix}.$$

这样由 Cauchy 问题解的唯一性便可得

$$\psi_{\delta j}(x) = \sum_{l=1}^{n-m} \widehat{r}_{\delta jl} \varphi_l(x, \lambda_{\delta j}).$$

另一方面,

$$\psi_{\delta j}(x) = \sum_{k=1}^n r_{\delta jk} \chi_k(x, \lambda_{\delta j}),$$

可以在 $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ 上增加上 $\varphi_{n-m+1}, \dots, \varphi_n$ 使之成为微分方程的基本解组, 于是 $\chi_k(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n d_{jk} \varphi_j(x, \lambda)$. 对任何 $u \in L^2(\delta)$, 由 Parseval 等式有

$$\begin{aligned} \|u\|_{\delta}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} |(u, \psi_{\delta j})_{\delta}|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{n-m} \widehat{r}_{\delta js} \int_{\delta} u(x) \overline{\varphi_s(x, \lambda_{\delta j})} dx \right) \left(\sum_{t=1}^{n-m} \widehat{r}_{\delta jt} \int_{\delta} \overline{u(x)} \varphi_t(x, \lambda_{\delta j}) dx \right) \\ &= \sum_{s,t=1}^{n-m} \sum_{j=1}^{\infty} g_{\delta s}(\lambda_{\delta j}) \overline{g_{\delta t}(\lambda_{\delta j})} \widehat{r}_{\delta js} \widehat{r}_{\delta jt}, \end{aligned}$$

其中,

$$g_{\delta s}(\lambda) = \int_{\delta} u(x) \overline{\varphi_s(x, \lambda)} dx, \quad s = 1, 2, \dots, n-m.$$

令 $\widehat{\rho}_{\delta ts}$ 为右连续的阶梯函数, 使得

$$\widehat{\rho}_{\delta ts}(\lambda_{\delta j}) - \widehat{\rho}_{\delta ts}(\lambda_{\delta j} - 0) = \sum_{\lambda_{\delta p} = \lambda_{\delta j}} \widehat{r}_{\delta js} \widehat{r}_{\delta jt},$$

则

$$\|u\|_{\delta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n \sum_{l=1}^m g_{\delta s}(\lambda) \overline{g_{\delta t}(\lambda)} d\hat{\rho}_{\delta ts}(\lambda).$$

同样按 5.1 节, 又有

$$\|u\|_{\delta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^n G_{\delta s}(\lambda) \overline{G_{\delta t}(\lambda)} d\rho_{ts}(\lambda),$$

其中,

$$G_{\delta s}(\lambda) = \int_{\delta} u(x) \overline{\chi_s(x, \lambda)} dx.$$

而

$$\begin{aligned} \psi_{\delta j}(x) &= \sum_{k=1}^n r_{\delta j k} \chi_k(x, \lambda_{\delta j}) = \sum_{k=1}^n r_{\delta j k} \sum_{l=1}^n d_{lk} \varphi_l(x, \lambda_{\delta j}) \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n d_{lk} r_{\delta j k} \right) \varphi_l(x, \lambda_{\delta j}). \end{aligned}$$

所以

$$\hat{r}_{\delta j} = \begin{pmatrix} \hat{r}_{\delta j 1} \\ \vdots \\ \hat{r}_{\delta j n-m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n d_{1k} r_{\delta j k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n d_{nk} r_{\delta j k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{\delta j 1} \\ \vdots \\ r_{\delta j n} \end{pmatrix} = D r_{\delta j},$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_{\delta p} = \lambda_{\delta j}} \overline{\hat{r}_{\delta j s}} \hat{r}_{\delta j t} &= \sum_{\lambda_{\delta p} = \lambda_{\delta j}} \overline{\left(\sum_{k=1}^n d_{sk} r_{\delta j k} \right)} \left(\sum_{l=1}^n d_{tl} r_{\delta j l} \right) \\ &= \sum_{l,k=1}^n d_{tl} \left(\sum_{\lambda_{\delta p} = \lambda_{\delta j}} \overline{\hat{r}_{\delta j k}} \hat{r}_{\delta j l} \right) \overline{d_{sk}}, \end{aligned}$$

所以 $\hat{\rho}_{\delta} = D \rho_{\delta} D^*$ (* 表示 Hermitian). 这里当 $t, s > n-m$ 时,

$$\hat{\rho}_{\delta ts} = 0,$$

显然 $\hat{\rho}_{\delta}$ 也具有 ρ_{δ} 所具有的那 3 条性质. 仿照 5.1 节中 Levitan 定理的证明, 如果对某个子列

$$\delta_j \rightarrow [a, b), \quad j \rightarrow \infty$$

有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \rho_{\delta_j} = \rho,$$

则

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \widehat{\rho}_{\delta_j} = \widehat{\rho} = D\rho D^*.$$

显然当 $t, s > n - m$ 时,

$$\widehat{\rho}_{ts} = 0.$$

同样地, 定理 5.1.2 的结果成立: 对任意的 $f \in L^2[a, b]$, 有 Parseval 等式

$$\|f\|^2 = \|g\|_{\widehat{\rho}}^2,$$

其中, 在 $L^2_{\widehat{\rho}}(-\infty, \infty)$ 度量下,

$$g_s(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\varphi_s(x, \lambda)} dx, \quad s = 1, 2, \dots, n - m.$$

并且展开式成立, 即在 $L^2[a, b]$ 度量下,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n-m} \varphi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\widehat{\rho}_{st}(\lambda).$$

另外, Levinson 引理也成立, 即若 $g \in L^2_{\widehat{\rho}}(-\infty, \infty)$, 则存在 $f \in L^2[a, b]$, 使得在 $L^2[a, b]$ 度量下,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n-m} \varphi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\widehat{\rho}_{st}(\lambda).$$

类似于引理 5.2.2, 有

引理 5.2.3 设对某个 μ , $\text{Im}\mu \neq 0$, 边值问题

$$\begin{cases} My = \mu y, \\ U^{(1)}y = 0 \end{cases}$$

在 $L^2[a, b]$ 中没有非零解. 又设 $f \in L^2[a, b]$, $g \in L^2_{\widehat{\rho}}(-\infty, \infty)$, 满足

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n-m} \varphi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\widehat{\rho}_{st}(\lambda),$$

等式按 $L^2[a, b]$ 度量成立, 则问题

$$\begin{cases} My - \mu y = f, \\ U^{(1)}y = 0 \end{cases}$$

在 $L^2[a, b)$ 中有唯一解

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s, t=1}^{n-m} \frac{\varphi_s(x, \lambda)}{\lambda - \mu} g_t(\lambda) d\hat{\rho}_{st}(\lambda),$$

等式也是按 $L^2[a, b)$ 度量成立.

证明 对 λ 的有限区间 Δ , 令

$$f_{\Delta}(x) = \int_{\Delta} \sum_{s, t=1}^{n-m} \varphi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\hat{\rho}_{st}(\lambda),$$

$$F_{\Delta}(x) = \int_{\Delta} \sum_{s, t=1}^{n-m} \frac{\varphi_s(x, \lambda)}{\lambda - \mu} g_t(\lambda) d\hat{\rho}_{st}(\lambda),$$

则

$$\begin{cases} (M - \mu)F_{\Delta} = f_{\Delta}, \\ U^{(1)}F_{\Delta} = 0, \end{cases}$$

其余的证明与引理 5.2.2 证明相同.

类似于定理 5.2.1 与定理 5.2.2 有

定理 5.2.3 设边值问题

$$\begin{cases} (M \pm i)y = 0, \\ U^{(1)}y = 0 \end{cases}$$

在 $L^2[a, b)$ 中没有非零解. $g \in L^2_{\hat{\rho}}(-\infty, \infty)$, 则存在 $f \in L^2[a, b)$, 使得在 $L^2[a, b)$ 度量下,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s, t=1}^{n-m} \varphi_s(x, \lambda) g_t(\lambda) d\hat{\rho}_{st}(\lambda),$$

其中,

$$g_t(\lambda) = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_s(x, \lambda)} dx, \quad t = 1, 2, \dots, n-m,$$

等式按 $L^2_{\hat{\rho}}(-\infty, \infty)$ 度量成立. 同时 $\hat{\rho}$ 是唯一的. 即若还存在一个 $\tilde{\hat{\rho}}$ 也使得展开式与 Parseval 等式成立, 那么在 $\hat{\rho}$ 和 $\tilde{\hat{\rho}}$ 共同的连续点 λ_1, λ_2 上, 有

$$\tilde{\hat{\rho}}(\lambda_2) - \tilde{\hat{\rho}}(\lambda_1) = \hat{\rho}(\lambda_2) - \hat{\rho}(\lambda_1).$$

注 这表示在 $\hat{\rho}(\lambda)$ 的连续点 λ_1, λ_2 处, 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\hat{\rho}_{\delta_j}(\lambda_2) - \hat{\rho}_{\delta_j}(\lambda_1)) = \hat{\rho}(\lambda_2) - \hat{\rho}(\lambda_1),$$

不管 δ_j 上的边界条件 $U_{\delta_j}^{(2)} f = 0$ 如何选取. 称 $\hat{\rho}$ 是问题

$$\begin{cases} My = \lambda y, \\ U^{(1)} y = 0 \end{cases}$$

关于 $\{\varphi_k(x, \lambda) | k = 1, 2, \dots, n-m\}$ 的谱矩阵.

5.3 Green 函数与谱矩阵的表示

设 $G_\delta(x, t, \lambda)$ 是区间 δ 上的 Green 函数.

引理 5.3.1 集合 $\{G_\delta\}$ 在 $(x, t, \lambda), \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ 的每个紧区域上一致有界等度连续 ($n=1$ 时还要去掉直线 $x=t$).

证明 定义在 $a < x, t < b$ 上的函数 $K(x, t)$ 是利用常数变易法解 $My = f$ 得到的积分表达式的核, 即

$$\int_{\delta} K(x, t) f(t) dt$$

是 $My = f$ 在 $\delta \subset (a, b)$ 上的解! 设 δ_0, δ_1 是 (a, b) 的闭子区间且 $\delta_0 \subset \overset{\circ}{\delta_1}$, 取 $\mu \in C_0^\infty(a, b)$, 使得

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \delta_0, \\ 0, & x \notin \delta_1 \end{cases}$$

(所以在 δ_0 的端点上 μ 的各阶导数为 0!). 令

$$J(x, t) = \mu(x) K(x, t), \quad t \in \delta_0,$$

设 $\delta \supset \delta_1$,

$$u(\cdot) = G(\cdot, t, \lambda) + J(\cdot, t), \quad t \in \delta_0.$$

这是一个定义在 δ 上的函数, 由于 Green 函数 G_δ 与 $-K$ 在 $x < t$ 和 $x > t$ 上都属于 C^n , 而在 $x = t$ 时, 它们的 $n-2$ 阶导数连续, $n-1$ 阶导数跃度一样, 所以 $u^{(n-1)}$ 在 $x = t$ 处也连续. 由于 $x \neq t$ 时,

$$MG_\delta = \lambda G_\delta,$$

$$MK = 0,$$

所以解出 $u^{(n)}$ 便知道 $u^{(n)}$ 在 $x = t$ 处也连续. 于是

$$u \in C^n(\delta), \quad t \in \delta_0.$$

由于 $\text{supp} \mu \subset \delta_1$, $U_\delta J = 0$, 因而 $U_\delta u = 0$, 这样便知道当 $x \neq t$ 时,

$$(M - \lambda)u = (M - \lambda)J,$$

所以

$$\begin{cases} (M - \lambda)u = (M - \lambda)J, \\ U_\delta u = 0 \end{cases}$$

(上式右端在 $x > t$ 和 $x < t$ 连续, $x = t$ 是个零测度集, 所以右端在 δ 上平方可积). 因此

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_{\delta} G_\delta(x, \tau, \lambda) (M_\tau - \lambda) J(\tau, t) d\tau \\ &= - \int_{\delta_1} G_\delta(x, \tau, \lambda) (M_\tau - \lambda) J(\tau, t) d\tau, \end{aligned}$$

即

$$G_\delta(x, t, \lambda) = -J(x, t) - \int_{\delta_1} G_\delta(x, \tau, \lambda) (M_\tau - \lambda) J(\tau, t) d\tau.$$

(1) 一致有界性.

$$\begin{aligned} |G_\delta(x, t, \lambda)| &= |J(x, t)| + \int_{\delta_1} |G_\delta(x, \tau, \lambda)| |(M_\tau - \lambda) J(\tau, t)| d\tau \\ &\leq |J(x, t)| + \|G_\delta(x, \cdot, \lambda)\|_{\delta_1} \|(M - \lambda) J(\cdot, t)\|_{\delta_1}, \end{aligned}$$

要证明当 $x, t \in \delta_0$, $\lambda \in \text{Im} \lambda \neq 0$ 的紧集 A 时, $G_\delta(x, t, \lambda)$ 是一致有界的. 关键在于估计 $\|G_\delta(x, \cdot, \lambda)\|_{\delta_1}$. 对 $f \in L^2(\delta)$, 有

$$u(x) = (G_\delta(\lambda)f)(x) = \int_{\delta} G_\delta(x, t, \lambda) f(t) dt$$

满足

$$\begin{cases} \lambda u - Mu = f, \\ U_\delta u = 0. \end{cases}$$

由自伴性

$$\int_{\delta} Mu \cdot \bar{u} dx = \int_{\delta} u \cdot \overline{Mu} dx,$$

即

$$\int_{\delta} (\lambda u - f) \cdot \bar{u} dx = \int_{\delta} u \cdot \overline{(\lambda u - f)} dx.$$

由此可得

$$2i \text{Im} \lambda \|u\|_{\delta}^2 = \int_{\delta} (\bar{u} f - u \bar{f}) dx.$$

故

$$2|\operatorname{Im}\lambda|\|u\|_{\delta}^2 \leq \int_{\delta} (|\bar{u}f| + |u\bar{f}|) dx \leq 2\|f\|_{\delta}\|u\|_{\delta},$$

$$\|u\|_{\delta} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \|f\|_{\delta}.$$

这表明 $G_{\delta}(\lambda)$ 是个有界线性算子. 现在将它用于 $u(\cdot) = G(\cdot, t, \lambda) + J(\cdot, t)$, 得

$$\|G(\cdot, t, \lambda) + J(\cdot, t)\|_{\delta} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \|(M - \lambda)J(\cdot, t)\|_{\delta},$$

故

$$\begin{aligned} \|G(\cdot, t, \lambda)\|_{\delta} &\leq \|J(\cdot, t)\|_{\delta} + \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \|(M - \lambda)J(\cdot, t)\|_{\delta} \\ &= \|J(\cdot, t)\|_{\delta_1} + \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \|(M - \lambda)J(\cdot, t)\|_{\delta_1}. \end{aligned}$$

当 $\lambda \in \Lambda$ 时, $\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}$ 有界. 右端显然与 δ 无关且关于 $t \in \delta_0$ 连续. 所以左端关于 $t \in \delta_0, \lambda \in \Lambda, \delta \supset \delta_1$ 是一致有界的.

$$\begin{aligned} ((T_{\delta} - \lambda)f, g) &= (f, (T_{\delta} - \bar{\lambda})g), \\ &= ((T_{\delta} - \lambda)f, G_{\delta}(\bar{\lambda})(T_{\delta} - \bar{\lambda})g) = (G_{\delta}(\bar{\lambda})^*(T_{\delta} - \lambda)f, (T_{\delta} - \bar{\lambda})g), \\ &\quad f, g \in \mathcal{D}(T_{\delta}), \end{aligned}$$

所以

$$G_{\delta}(\bar{\lambda})^*(T_{\delta} - \lambda) = I|_{\mathcal{D}(T_{\delta})}, \quad G_{\delta}(\bar{\lambda})^* = G_{\delta}(\lambda),$$

即

$$\overline{G_{\delta}(t, x, \bar{\lambda})} = G_{\delta}(x, t, \lambda),$$

所以 $\|G_{\delta}(x, \cdot, \lambda)\|_{\delta}$ 关于 $x \in \delta_0, \lambda \in \Lambda, \delta \supset \delta_1$ 也一致有界. 由此可得 $G_{\delta}(x, t, \lambda)$ 在 $x, t \in \delta_0, \lambda \in \Lambda$ 上一致有界.

(2) 等度连续性 ($n=1$ 时, 直线 $x=t$ 除外).

$$(i) \quad \frac{\partial G_{\delta}(x, t, \lambda)}{\partial t} = \frac{-\partial J(x, t)}{\partial t} - \int_{\delta_1} G_{\delta}(x, \tau, \lambda) \frac{\partial}{\partial t} (M_{\tau} - \lambda) J(\tau, t) d\tau, \text{ 用同样的方}$$

法可证得 $\frac{\partial G_{\delta}(x, t, \lambda)}{\partial t}$ 关于 $x, t \in \delta_0, \lambda \in \Lambda$ 是一致有界的;

$$(ii) \quad \text{利用对称性知 } \frac{\partial G_{\delta}(x, t, \lambda)}{\partial x} \text{ 关于 } x, t \in \delta_0, \lambda \in \Lambda \text{ 也是一致有界的;}$$

(iii) $G_{\delta}(x, t, \lambda), \operatorname{Im}\lambda \neq 0$ 是 λ 的解析函数, 而 $\{G_{\delta}\}$ 关于 $x, t \in \delta_0, \lambda \in \Lambda$ 一致有界, 所以由

$$\frac{\partial G_{\delta}(x, t, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G_{\delta}(x, t, \zeta)}{(\zeta - \lambda)^2} d\zeta$$



图 5.3

知 $\frac{\partial G_\delta(x, t, \lambda)}{\partial \lambda}$ 关于 $x, t \in \delta_0, \lambda \in \Lambda$ 也一致有界.

这样由 (i)~(iii) 便得到 $\{G_\delta\}$ 在 $x, t \in \delta_0, \lambda \in \Lambda$ 上的等度连续性.

定理 5.3.1 设 $\{G_\delta\}$ 是自伴算子 T_δ 的 Green 函数集合, 其中, 闭区间 $\delta \subset (a, b)$, 则可以从 $\{G_\delta\}$ 中抽出收敛的子列来,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_{\delta_m} = G,$$

$G(x, t, \lambda)$ 对于 $x, t \in (a, b)$ (当 $n = 1$ 时, 直线 $x = t$ 除外) 和 $\text{Im} \lambda \neq 0$ 连续, 关于 λ 解析且具有下列性质:

(1) $\frac{\partial^k G}{\partial x^k}, k = 0, 1, \dots, n-2$ 在 $x, t \in (a, b)$ 上连续, $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}$ 和 $\frac{\partial^n G}{\partial x^n}$ 分别在 $x \leq t$ 和 $x \geq t$ 上连续;

$$(2) \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(t+0, t, \lambda) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(t-0, t, \lambda) = \frac{-1}{p_n(t)}, a < t < b;$$

(3) 当 $x \neq t$ 时, G 关于 x 满足方程 $My = \lambda y$;

(4) $\frac{\partial^{j+k} G_m}{\partial x^j \partial t^k} \rightarrow \frac{\partial^{j+k} G}{\partial x^j \partial t^k}, j, k = 0, 1, \dots, n-1$. 当 $j, k \neq n-1$ 时, 收敛在 $x, t \in (a, b), \text{Im} \lambda \neq 0$ 的紧区域上是一致的. 当 j 或 $k = n-1$ 时, 收敛在 $x, t \in (a, b), x \neq t, \text{Im} \lambda \neq 0$ 的紧区域上是一致的;

$$(5) G(x, t, \lambda) = \overline{G(t, x, \bar{\lambda})};$$

$$(6) G(x, \cdot, \lambda) \in L^2(a, b), x \in (a, b);$$

(7) 若 $f \in L^2(a, b)$, 则

$$v(x) = \int_a^b G(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad \text{Im} \lambda \neq 0$$

属于

$$\mathcal{D} = \left\{ u \in L^2(a, b) \mid u \in C^{n-1}(a, b), u^{(n-1)} \in AC_{\text{loc}}(a, b), Mu \in L^2(a, b) \right\}$$

(这是 $T_1(M)$ 的定义域) 且

$$Mv = \lambda v + f.$$

证明 由 Arzela-Ascoli 定理, 存在 $\delta_m \subset (a, b), m = 2, 3, \dots$, 使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m = (a, b),$$

$$G_m(x, t, \lambda) = G_{\delta_m}(x, t, \lambda)$$

在 $x, t \in (a, b)$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ 的每个紧子集上一致收敛到某个 $G(x, t, \lambda)$. 取一串紧子集 K_j , 使得

$$K_j \rightarrow x, t \in (a, b), \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0.$$

再用 Cantor 对角线技术便可得到这样的 δ_m . 显然 $G(x, t, \lambda)$ 定义在 $x, t \in (a, b)$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ 上, 连续并且关于 λ 解析.

(1) 对于 $x, t \in \delta_0$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, $\delta \supset \delta_1 \supset \delta_0$, 有

$$G_\delta(x, t, \lambda) = -J(x, t) - \int_{\delta_1} G_\delta(x, \tau, \lambda)(M_\tau - \lambda)J(\tau, t)d\tau.$$

于是当 $x, t \in \delta_0$ 时,

$$\frac{\partial^j G_\delta(x, t, \lambda)}{\partial t^j} = -\frac{\partial^j K(x, t)}{\partial t^j} - \int_{\delta_1} G_\delta(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^j}{\partial t^j} (M_\tau - \lambda)J(\tau, t)d\tau, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

当 $x \neq t$ 时,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\delta_1} G_\delta(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (\lambda J(\tau, t) - M_\tau J(\tau, t))d\tau \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\delta_1^-}^t + \int_t^{\delta_1^+} \right) G_\delta(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (\lambda J(\tau, t) - M_\tau J(\tau, t))d\tau \\ &= \int_{\delta_1^-}^t G_\delta(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^n}{\partial t^n} (\lambda J(\tau, t) - M_\tau J(\tau, t))d\tau \\ & \quad + G_\delta(x, t-0, \lambda) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (\lambda J(t-0, t) - MJ(t-0, t)) \\ & \quad + \int_t^{\delta_1^+} G_\delta(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^n}{\partial t^n} (\lambda J(\tau, t) - M_\tau J(\tau, t))d\tau \\ & \quad - G_\delta(x, t+0, \lambda) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (\lambda J(t+0, t) - MJ(t+0, t)) \\ &= \int_{\delta_1} G_\delta(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^n}{\partial t^n} (\lambda J(\tau, t) - M_\tau J(\tau, t))d\tau \\ & \quad - G_\delta(x, t, \lambda) \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (\lambda J(t+0, t) - MJ(t+0, t)) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (\lambda J(t-0, t) - MJ(t-0, t)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\delta_1} G_\delta(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^n}{\partial t^n} (\lambda J(\tau, t) - M_\tau J(\tau, t)) d\tau \\
&\quad G_\delta(x, t, \lambda) \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (\lambda K(t+0, t) - MK(t+0, t)) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (\lambda K(t-0, t) \right. \\
&\quad \left. - MK(t-0, t)) \right) \\
&= \int_{\delta_1} G_\delta(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^n}{\partial t^n} (\lambda J(\tau, t) - M_\tau J(\tau, t)) d\tau + (-1)^n \frac{\lambda G_\delta(x, t, \lambda)}{p_n(t)}.
\end{aligned}$$

所以当 $x \neq t$ 时,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^n G_\delta(x, t, \lambda)}{\partial t^n} \\
&= \frac{\partial^n K(x, t)}{\partial t^n} + \int_{\delta_1} G_\delta(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^n}{\partial t^n} (\lambda J(\tau, t) - M_\tau J(\tau, t)) d\tau + (-1)^n \frac{\lambda G_\delta(x, t, \lambda)}{p_n(t)}.
\end{aligned}$$

利用 G_m 在紧集上的一致收敛可得: 当 $x, t \in \delta_0, \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ 时,

$$G(x, t, \lambda) = -J(x, t) - \int_{\delta_1} G(x, \tau, \lambda) (M_\tau - \lambda) J(\tau, t) d\tau,$$

于是

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^j G(x, t, \lambda)}{\partial t^j} \\
&= -\frac{\partial^j K(x, t)}{\partial t^j} - \int_{\delta_1} G(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^j}{\partial t^j} (M_\tau - \lambda) J(\tau, t) d\tau, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^n G(x, t, \lambda)}{\partial t^n} = \frac{\partial^n K(x, t)}{\partial t^n} + \int_{\delta_1} G(x, \tau, \lambda) \\
&\quad \frac{\partial^n}{\partial t^n} (\lambda J(\tau, t) - M_\tau J(\tau, t)) d\tau + (-1)^n \frac{\lambda G(x, t, \lambda)}{p_n(t)}, \quad t \neq x.
\end{aligned}$$

由于有性质 (5), 借助于它便可得到 (1).

$$(2) \quad \frac{\partial^{n-1} G(x, t, \lambda)}{\partial x^{n-1}} = -\frac{\partial^{n-1} K(x, t)}{\partial x^{n-1}} - \int_{\delta_1} \frac{\partial^{n-1} G(x, \tau, \lambda)}{\partial x^{n-1}} (M_\tau - \lambda) J(\tau, t) d\tau.$$

后面的积分是 $x, t \in (a, b)$ 的连续函数. 所以 $\frac{\partial^{n-1} G(x, t, \lambda)}{\partial x^{n-1}} \rightarrow \frac{\partial^{n-1} K(x, t)}{\partial x^{n-1}}$ 在 $x = t$ 处的间断一样, 等于 $-\frac{1}{p_n(t)}$.

(3) 在 $x, t \in (a, b), x \neq t, \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ 的每个紧集上, 因为

$$\frac{\partial^j G_m}{\partial t^j} = \frac{\partial^j K(x, t)}{\partial t^j} - \int_{\delta_1} G_m(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^j}{\partial t^j} (M_\tau - \lambda) J(\tau, t) d\tau, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

右端一致收敛到

$$-\frac{\partial^j K(x, t)}{\partial t^j} - \int_{\delta_1} G(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^j}{\partial t^j} (M_\tau - \lambda) J(\tau, t) d\tau,$$

所以

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^j G_m}{\partial t^j} = \frac{\partial^j G}{\partial t^j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \text{ 一致成立.}$$

另外 $x \neq t$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n G_m}{\partial t^n} &= -\frac{\partial^n K(x, t)}{\partial t^n} \\ &+ \int_{\delta_1} G_m(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^n}{\partial t^n} (\lambda J(\tau, t) - M_\tau J(\tau, t)) d\tau + (-1)^n \frac{\lambda G_m(x, t, \lambda)}{p_n(t)}, \end{aligned}$$

右端一致收敛到

$$-\frac{\partial^n K(x, t)}{\partial t^n} + \int_{\delta_1} G(x, \tau, \lambda) \frac{\partial^n}{\partial t^n} (\lambda J(\tau, t) - M_\tau J(\tau, t)) d\tau + (-1)^n \frac{\lambda G(x, t, \lambda)}{p_n(t)},$$

故 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^n G_m}{\partial t^n} = \frac{\partial^n G}{\partial t^n}$ 也一致成立. 类似地, 利用 (5) 的对称性, 在上述紧集上

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^j G_m}{\partial x^j} = \frac{\partial^j G}{\partial x^j}, j = 0, 1, 2, \dots, n$ 一致成立. 可是当 $x \neq t$ 时, 作为 x 的函数

$$MG_m = \lambda G_m,$$

故 $x \neq t$ 时,

$$MG = \lambda G.$$

(4) 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{j+k} G_m}{\partial x^j \partial t^k} &= -\frac{\partial^{j+k} K}{\partial x^j \partial t^k} \\ &- \int_{\delta_1} \frac{\partial^j G_m(x, \tau, \lambda)}{\partial x^j} \frac{\partial^k}{\partial t^k} (M_\tau - \lambda) J(\tau, t) d\tau, \quad j, k = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{j+k} G}{\partial x^j \partial t^k} &= -\frac{\partial^{j+k} K}{\partial x^j \partial t^k} \\ &- \int_{\delta_1} \frac{\partial^j G(x, \tau, \lambda)}{\partial x^j} \frac{\partial^k}{\partial t^k} (M_\tau - \lambda) J(\tau, t) d\tau, \quad j, k = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

所以由 (3) 的一致收敛性可得

$$\frac{\partial^{j+k} G_m}{\partial x^j \partial t^k} \rightarrow \frac{\partial^{j+k} G}{\partial x^j \partial t^k}, \quad j, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

由于 $j, k \neq n-1$ 时, G_m 和 G 的导数保持连续, 所以上述收敛在 $x, t \in (a, b), \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ 的紧区域上是一致的. 当 j, k 中有一个是 $n-1$ 时, 收敛在 $x, t \in (a, b), x \neq t, \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ 的紧区域上一致.

(5) 由 G_m 的对称性即得 G 的对称性.

(6) 由

$$\|G_\delta(\cdot, t, \lambda)\|_\delta \leq \|J(\cdot, t)\|_{\delta_1} + \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|} \|(M - \lambda)J(\cdot, t)\|_{\delta_1}, \quad t \in \delta_0$$

知存在着依赖于 δ_0 和 δ_1 的常数 C_1 , 使得

$$\|G_\delta(\cdot, t, \lambda)\|_\delta \leq C_1 + \frac{C_1}{|\operatorname{Im} \lambda|} (|\lambda| + 1), \quad t \in \delta_0.$$

当 $\tilde{\delta} \subset \delta$ 时,

$$\|G_\delta(\cdot, t, \lambda)\|_{\tilde{\delta}} \leq \|G_\delta(\cdot, t, \lambda)\|_\delta \leq C_1 + \frac{C_1}{|\operatorname{Im} \lambda|} (|\lambda| + 1),$$

若固定 $\tilde{\delta}$, 让 $\delta = \delta_m, m \rightarrow \infty$ 时, $\delta_m \rightarrow (a, b)$ 可得

$$\|G(\cdot, t, \lambda)\|_{\tilde{\delta}} \leq C_1 + \frac{C_1}{|\operatorname{Im} \lambda|} (|\lambda| + 1).$$

再让 $\tilde{\delta} \rightarrow (a, b)$ 便得

$$G(\cdot, t, \lambda) \in L^2(a, b),$$

这里 t, λ 固定, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0 (t \in \delta_0 \text{ 而 } \delta_0 \text{ 是可变的})$. 同样,

$$G(x, \cdot, \lambda) \in L^2(a, b) \quad (x, \lambda \text{ 固定, } \operatorname{Im} \lambda \neq 0).$$

(7) 若 $f \in L^2(a, b)$, 则积分

$$\int_a^b G(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad x \in (a, b), \operatorname{Im} \lambda \neq 0$$

绝对收敛, 并且由于

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^{a+\varepsilon} + \int_{b-\varepsilon}^b \right) |G(x, t, \lambda)| |f(t)| dt \\ & \leq \sqrt{\int_a^{a+\varepsilon} |G|^2 dt} \sqrt{\int_a^{a+\varepsilon} |f|^2 dt} + \sqrt{\int_{b-\varepsilon}^b |G|^2 dt} \sqrt{\int_{b-\varepsilon}^b |f|^2 dt}, \end{aligned}$$

其中,

$$\left(\int_a^{a+\varepsilon} + \int_{b-\varepsilon}^b \right) |G(x, t, \lambda)|^2 dt \leq \int_a^b |G(x, t, \lambda)|^2 dt,$$

右边是 x 的连续函数, 所以关于 x 是局部一致有界的. 这样积分的收敛关于 x 是局部一致的. 令

$$v(x) = \int_a^b G(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

利用

$$\frac{\partial G_\delta}{\partial t}(x, t, \lambda) = -\frac{\partial J(x, t)}{\partial t} - \int_{\delta_1} G_\delta(x, \tau, \lambda) \frac{\partial}{\partial t}(M_\tau - \lambda) J(\tau, t) d\tau,$$

用引理的方法得

$$\left\| \frac{\partial G_\delta}{\partial t}(\cdot, t, \lambda) \right\|_\delta \leq \left\| \frac{\partial J(\cdot, t)}{\partial t} \right\|_{\delta_1} + \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(M_\tau - \lambda) J(\tau, t) \right\|_{\delta_1}.$$

再重复 (6) 里的方法知 $\left\| \frac{\partial G}{\partial x}(x, \cdot, \lambda) \right\|$ 当 $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, λ 固定时, 关于 x 是局部一致有界的, 所以积分 $\int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x, t, \lambda) f(t) dt$ 关于 x 局部一致收敛, 由逐项微分定理,

$$v'(x) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

这个函数在 (a, b) 上连续. 类似地可得 $v'(x), \dots, v^{(n-1)}$ 在 (a, b) 上都连续, $v^{(n-1)}(x)$ 可以写成它的导数的不定积分, 这个导数由于连续在有限区间上可积, 所以 $v^{(n-1)}(x)$ 是局部绝对连续的. 因为

$$v^{(n-1)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

所以

$$\begin{aligned} v^{(n)}(x) &= \int_a^b \frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x, t, \lambda) f(t) dt + \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, x-0, \lambda) f(x) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, x+0, \lambda) f(x) \\ &\quad - \int_a^b \frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x, t, \lambda) f(t) dt + f(x) \left[\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x+0, x, \lambda) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x-0, x, \lambda) \right] \\ &= \frac{1}{p_n(x)} f(x) + \int_a^b \frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x, t, \lambda) f(t) dt. \end{aligned}$$

于是

$$Mv = \int_a^b M_x G(x, t, \lambda) f(t) dt + f(x) = \lambda v + f.$$

剩下来只要证明 $v \in L^2(a, b)$ 即可. 设 δ_0 是 (a, b) 的任一闭区间, 因为

$$\|G_\delta(\cdot, t, \lambda)\|_\delta \leq C_1 + \frac{C_1}{|\operatorname{Im} \lambda|} (|\lambda| + 1), \quad t \in \delta_0,$$

所以

$$\|G_\delta(x, \cdot, \lambda)\|_\delta \leq C_1 + \frac{C_1}{|\operatorname{Im}\lambda|}(|\lambda| + 1), \quad x \in \delta_0.$$

由 (6) 也得到

$$\|G(x, \cdot, \lambda)\| \leq C_1 + \frac{C_1}{|\operatorname{Im}\lambda|}(|\lambda| + 1), \quad x \in \delta_0,$$

取闭区间 $\Delta \subset (a, b)$, 使得

$$\left(\int_{(a,b) \setminus \Delta} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

当 m 充分大时, $\Delta \subset \delta_m$, 对 $x \in \delta_0$,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\delta_m} G_m(x, t, \lambda) f(t) dt - \int_a^b G(x, t, \lambda) f(t) dt \right| \\ & \leq \left| \int_{\Delta} (G_m(x, t, \lambda) - G(x, t, \lambda)) f(t) dt \right| \\ & \quad + \left| \int_{(a,b) \setminus \Delta} G(x, t, \lambda) f(t) dt \right| + \left| \int_{\delta_m \setminus \Delta} G_m(x, t, \lambda) f(t) dt \right| \\ & \leq \int_{\Delta} |G_m(x, t, \lambda) - G(x, t, \lambda)| |f(t)| dt + \|G(x, \cdot, \lambda)\| \\ & \quad \|f\|_{(a,b) \setminus \Delta} + \|G_m(x, \cdot, \lambda)\|_{\delta_m} \|f\|_{(a,b) \setminus \Delta} \\ & \leq 2 \left(C_1 + \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}(|\lambda| + 1) \right) \varepsilon + \int_{\Delta} |G_m(x, t, \lambda) - G(x, t, \lambda)| |f(t)| dt, \end{aligned}$$

利用 G_m 在 $x, t \in (a, b)$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ 的紧集上一致收敛到 G , 在 m 充分大时便有

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\delta_m} G_m(x, t, \lambda) f(t) dt - \int_a^b G(x, t, \lambda) f(t) dt \right| \\ & \leq \left[2 \left(C_1 + \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}(|\lambda| + 1) \right) + 1 \right] \varepsilon, \quad x \in \delta_0, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (G_{\delta_m}(\lambda)f)(x) = v(x) \text{ 对 } x \in \delta_0 \text{ 一致成立.}$$

可是

$$\|G_{\delta_m}(\lambda)f\|_{\delta_m} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \|f\|_{\delta_m} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \|f\|,$$

当 m 充分大时, $\delta_0 \subset \delta_m$, 故

$$\|G_{\delta_m}(\lambda)f\|_{\delta_0} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \|f\|, \quad m = 1, 2, \dots,$$

取极限得

$$\|v\|_{\delta_0} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \|f\|,$$

所以

$$\|v\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \|f\|.$$

并不就把 G 称为 Green 函数, 因为还没有考虑 G 的边条件. 下面将考虑两种情形, 它们在 $n=2$ 时对应了两种最重要的情形.

情形 5.3.1 设方程 $(M \mp i)y = 0$ 在 \mathcal{D} 内没有非零解, 则对任何 $\lambda, \operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $My = \lambda y$ 在 \mathcal{D} 内仅有零解.

证明 设 $\lambda_0, \operatorname{Im}\lambda_0 > 0$, $My = \lambda_0 y$ 在 \mathcal{D} 内只有零解. 对于 $|\lambda - \lambda_0| < \operatorname{Im}\lambda_0$, 如果 $v \in \mathcal{D}$ 是 $My = \lambda y$ 的解, 则令

$$u = v - (\lambda - \lambda_0)G(\lambda_0)v,$$

由定理 5.3.1, $G(\lambda_0)v \in \mathcal{D}$, 故 $u \in \mathcal{D}$, 而

$$(M - \lambda_0)u = (M - \lambda_0)v - (\lambda - \lambda_0)v = (M - \lambda)v = 0,$$

故 $u = 0$. 于是

$$\|v\| = |\lambda - \lambda_0| \|G(\lambda_0)v\| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\operatorname{Im}\lambda_0} \|v\| < \|v\|.$$

所以 $v = 0$.

定理 5.3.2 在情形 5.3.1 下, G 是唯一的,

$$\lim_{\delta \rightarrow (a,b)} G_\delta = G,$$

收敛在 $x, t \in (a, b), \operatorname{Im}\lambda \neq 0$ 的任何紧集上是一致的, 并且与 δ 上的边界条件 U_δ 的选取无关. 这时称 G 为情形 5.3.1 的 Green 函数.

注 这种情形对应于 $T_0(M)$ 是自伴的, 亏指数为 $(0, 0)$ (极限点情形).

证明 假若还有另一个 \tilde{G} , 也具有定理 5.3.1 的那些性质, 则作为 x 的函数, $G - \tilde{G}$ 在 $x = t$ 处的间断便消失了, 因而

$$(G - \tilde{G})(\cdot, t, \lambda) \in C^n(a, b).$$

这样便有 $G - \tilde{G} \in \mathcal{D}$ 且当 $x \neq t$ 时, 由于

$$M(G - \tilde{G}) = \lambda(G - \tilde{G}), \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0,$$

加上 $(G - \tilde{G}) \in C^n(a, b)$, 故等式在 (a, b) 上成立. 由前面的证明知 $G = \tilde{G}$.

如果 $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, 则 $-G(\lambda) = (\lambda I - T_1(M))^{-1} = R(\lambda, T_1(M))$, 这是一个 Carleman 型积分算子.

(1) $f \in L^2(a, b)$, $G(\lambda)f \in \mathcal{D}$ 且 $(M - \lambda)G(\lambda)f = f$, 即

$$(\lambda I - T_1(M))(-G(\lambda)) = I;$$

(2) $u \in \mathcal{D}$, 令 $f = (M - \lambda)u$, 则 $f \in L^2(a, b)$, 而 $G(\lambda)f \in D$, 所以有

$$w = u - G(\lambda)f \in \mathcal{D},$$

$$(M - \lambda)w = (M - \lambda)u - (M - \lambda)G(\lambda)f = (M - \lambda)u - f = 0,$$

故 $w = 0$, 即

$$u = G(\lambda)f = G(\lambda)(T_1(M) - \lambda I)u, \quad (-G(\lambda))(\lambda I - T_1(M)) = I|_{\mathcal{D}},$$

$$\mathcal{D}^{\lambda I - T_1(M)} L^2(a, b) \stackrel{G(\lambda)}{\subset} \mathcal{D}.$$

情形 5.3.2 考虑区间 $[a, b)$, 令

$$\widehat{\mathcal{D}} = \{u \in L^2[a, b) | u \in C^{n-1}[a, b), u^{(n-1)} \in AC_{\text{loc}}[a, b), Mu \in L^2[a, b),$$

$$U_j(u) = \sum_{k=1}^n M_{jk} u^{(k-1)}(a) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{rank}(M_{jk}) = m\},$$

把边界条件记成 $U^{(1)}u = 0$.

假设 $T_1(M)$ 限制在 $\widehat{\mathcal{D}}$ 上是个自伴算子 T . 这表示 $T_0(M)$ 是极限点的^[22]. 而 $n = 2m$, 亏指数为 (m, m) . $My = \pm iy$ 在 $\widehat{\mathcal{D}}$ 里只有零解 (这是由于 T 自伴, $\pm i \in \rho(T)$). 考虑闭子区间 $\delta = [a, \tilde{b}] \subset [a, b)$, 增加 $n - m = m$ 个线性无关的边界条件

$$U_\delta^{(2)}u = 0,$$

使得

$$\widehat{\mathcal{D}}_\delta = \{u \in \widehat{\mathcal{D}} | U_\delta^{(2)}u = 0\}$$

是 $T_0(M|_\delta)$ 的一个自伴延拓 T_δ . 以 G_δ 表示它的 Green 函数. 则引理 5.3.1 与定理 5.3.1 仍然成立, 由于每个 G_δ 都满足

$$U^{(1)}G_\delta = 0,$$

所以极限 G (因为局部一致收敛) 也满足这个边界条件. $\forall f \in L^2[a, b), \operatorname{Im} \lambda \neq 0$,

$$v(x) = \int_a^b G(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

则 $v \in \widehat{\mathcal{D}}$. 同样可以证明

定理 5.3.3 在情形 5.3.2 下, G 是唯一的,

$$\lim_{\delta \rightarrow [a,b]} G_\delta = G,$$

收敛在 $x, t \in [a, b], \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ 的任何紧集上是一致的, 并且与 δ 上的边界条件 $U_\delta^{(2)}$ 的选取无关. 这时称 G 为情形 5.3.2 的 Green 函数.

$\operatorname{Im} \lambda \neq 0, -G(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = R(\lambda, T)$ 也是一个 Carleman 型积分算子.

可以用 Green 函数去表示谱矩阵. 先考虑正则的情形. 设 T_δ 是 $T_0(M|_\delta)$ 的自伴延拓,

$$\mathcal{D}(T_\delta) = \{u \in \mathcal{D}(T_1(M|_\delta)) | U_\delta u = 0\},$$

对应的 Green 函数是 $G_\delta(x, t, \lambda)$, 令

$$H_\delta(x, t, \lambda) = G_\delta(x, t, \lambda) - G_\delta(x, t, \bar{\lambda}).$$

定理 5.3.4 设 $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, 则

$$2i \operatorname{Im} \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_{\delta jk}(\mu)}{|\mu - \lambda|^2} = \frac{\partial^{j+k-2} H_\delta}{\partial x^{j-1} \partial t^{k-1}}(c, c, \lambda), \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

证明

$$(1) (l-m) \int_\delta G_\delta(x, s, l) G_\delta(s, t, m) ds = G_\delta(x, t, l) - G_\delta(x, t, m), \operatorname{Im} l, \operatorname{Im} m \neq 0.$$

设 u 是

$$\begin{cases} (M-l)u = G_\delta(x, t, m), \\ U_\delta u = 0 \end{cases}$$

的解, 则

$$u(x) = \int_\delta G_\delta(x, s, l) G_\delta(s, t, m) ds.$$

令

$$v = G_\delta(x, t, l) - G_\delta(x, t, m),$$

则 $v \in C^n(\delta), U_\delta v = 0$, 而

$$Mv = lG_\delta(x, t, l) - mG_\delta(x, t, m) = lv + (l-m)G_\delta(x, t, m),$$

即

$$(M-l)v = (l-m)G_\delta(x, t, m),$$

故 (逆算子存在)

$$v = (l-m)u,$$

这就是所求的公式. 在公式中取 $m = \bar{l}$ 代入即得

$$2i\text{Im}l \int_{\delta} G_{\delta}(x, s, l) G_{\delta}(s, t, \bar{l}) ds = H_{\delta}(x, t, l).$$

(2) 由 $G_{\delta}(t, s, l) = \overline{G_{\delta}(s, t, \bar{l})}$ 可得

$$2i\text{Im}l \int_{\delta} \frac{\partial^j G_{\delta}(x, s, l)}{\partial x^j} \frac{\partial^k \overline{G_{\delta}(t, s, \bar{l})}}{\partial t^k} ds = \frac{\partial^{j+k} H_{\delta}(x, t, l)}{\partial x^j \partial t^k}, \quad j, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

(3) 设 $\{\lambda_{\delta k}\}$ 和 $\{\varphi_{\delta k}\}$ 是 T_{δ} 的特征值和特征函数, 则

$$M\varphi_{\delta m} = l\varphi_{\delta m} + (\lambda_{\delta m} - l)\varphi_{\delta m},$$

故

$$\begin{aligned} \varphi_{\delta m}(x) &= (\lambda_{\delta m} - l) \int_{\delta} G_{\delta}(x, s, l) \varphi_{\delta m}(s) ds, \\ \varphi_{\delta m}^{(k)}(x) &= (\lambda_{\delta m} - l) \int_{\delta} \frac{\partial^k G_{\delta}}{\partial x^k}(x, s, l) \varphi_{\delta m}(s) ds, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

这表示 $\frac{\partial^k G_{\delta}(x, \cdot, l)}{\partial x^k}$ 的 Fourier 系数是 $\frac{\overline{\varphi_{\delta m}^{(k)}(x)}}{\lambda_{\delta m} - \bar{l}}$, 因而由 Parseval 等式得

$$\begin{aligned} 2i\text{Im}l \int_{\delta} \frac{\partial^j G_{\delta}(x, s, l)}{\partial x^j} \frac{\partial^k \overline{G_{\delta}(t, s, \bar{l})}}{\partial t^k} ds &= 2i\text{Im}l \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\varphi_{\delta m}^{(k)}(t)}}{\lambda_{\delta m} - \bar{l}} \cdot \frac{\varphi_{\delta m}^{(j)}(x)}{\lambda_{\delta m} - l} \\ &= 2i\text{Im}l \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\delta m}^{(j)}(x) \overline{\varphi_{\delta m}^{(k)}(t)}}{|\lambda_{\delta m} - l|^2} \\ &= \frac{\partial^{j+k} H_{\delta}(x, t, l)}{\partial x^j \partial t^k}. \end{aligned}$$

(4) 利用

$$\varphi_{\delta k} = \sum_{j=1}^n r_{\delta k j} \chi_j(x, \lambda_{\delta k})$$

得

$$2i\text{Im}l \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p, q=1}^n \lambda_p^{(j)}(x, \lambda_{\delta m}) \overline{\chi_q^{(k)}(t, \lambda_{\delta m})} r_{\delta m p} \overline{r_{\delta m q}} \frac{1}{|\lambda_{\delta m} - l|^2} = \frac{\partial^{j+k} H_{\delta}(x, t, l)}{\partial x^j \partial t^k},$$

即

$$2i\text{Im}l \int_{\infty}^{\infty} \sum_{p, q=1}^n \lambda_p^{(j)}(x, \lambda) \overline{\chi_q^{(k)}(t, \lambda)} \frac{1}{|\lambda - l|^2} d\rho_{\delta p q}(\lambda) = \frac{\partial^{j+k} H_{\delta}(x, t, l)}{\partial x^j \partial t^k}.$$

取 $x = t = c$, 则得

$$2i\operatorname{Im}l \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_{\delta jk}(\lambda)}{|\lambda - l|^2} = \frac{\partial^{j+k-2} H_{\delta}(c, c, l)}{\partial x^{j-1} \partial t^{k-1}}.$$

以下记

$$G = \lim_{m \rightarrow \infty} G_m,$$

$$H(x, t, l) = G(x, t, l) - G(x, t, \bar{l}),$$

$$P_{\delta jk}(l) = \frac{\partial^{j+k-2} H_{\delta}(c, c, l)}{\partial x^{j-1} \partial t^{k-1}}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n,$$

$$P_{jk}(l) = \frac{\partial^{j+k-2} H(c, c, l)}{\partial x^{j-1} \partial t^{k-1}}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

定理 5.3.5 设 $\{G_m\}$ 是从 $\{G_{\delta}\}$ 中选取来的收敛子列, $\{\rho_m\} = \{(\rho_{\delta_m jk})\}$ 是对应于 δ_m 的谱矩阵, 则存在非降的 Hermite 矩阵 $\rho = (\rho_{jk})$, 每个 ρ_{jk} 在 λ 的有限区间上都是有界变差函数, 且

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\rho_m(\mu) - \rho_m(\lambda)) = \rho(\mu) - \rho(\lambda)$$

对 ρ 的连续点 λ, μ 成立.

$$\rho_{jk}(\mu) - \rho_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{\lambda}^{\mu} P_{jk}(\sigma + i\epsilon) d\sigma.$$

注 定理 5.3.5 不仅又一次给出了谱矩阵的存在性证明, 并且通过公式对情形 5.3.1 和情形 5.3.2 证明了谱矩阵是唯一的.

证明 (1) ρ 的存在.

$$2i\operatorname{Im}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_{\delta_m jk}(\mu)}{|\mu - \lambda|^2} = P_{\delta_m jk}(\lambda),$$

当 $\lambda = i$ 时, 因为 $\rho_{\delta_m jj}$ 单调, 所以

$$\int_{-l}^l \frac{d\rho_{\delta_m jj}(\mu)}{1 + \mu^2} \leq \frac{P_{\delta_m jj}(i)}{2i}.$$

由于

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^{j+k} G_m}{\partial x^j \partial t^k} = \frac{\partial^{j+k} G}{\partial x^j \partial t^k},$$

收敛在 $x, t \in (a, b)$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ 的紧集上一致, 所以

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{\delta_m jj}(\lambda) = P_{jj}(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

在应用定理 5.3.1 的 4 时, 本来要对 $j = n$ 的情形特殊考虑, 可是 H_δ 是两个 G_δ 的差, 在 $x = t$ 处跃度消失了, 是连续的, 所以 $j = n$ 时也是没有问题的. 收敛在 $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ 的紧集 A 上是一致的. 所以 $\frac{P_{\delta_m jj}^{(i)}}{2i}$ 关于 m 是一致有界的, 那么

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_{\delta_m jj}(\mu)}{1+\mu^2} &< A, \quad j=1, \dots, n, \\ \int_{-l}^l d\rho_{\delta_m jj}(\mu) &< A(1+l^2), \quad j=1, 2, \dots, n, \\ \rho_{\delta_m jj}(l) &< A(1+l^2), \quad j=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

但是

$$|\rho_{\delta_m jk}(\Delta)|^2 \leq \rho_{\delta_m jj}(\Delta) \rho_{\delta_m kk}(\Delta),$$

因此 $\rho_{\delta_m jk}(x)$ 在有限区间上的全变差有界, 与 m 无关! 故由 Helly 选择定理, 存在 $\{\rho_m\}$ 的子列, 使得

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \rho_{m_p} = \rho,$$

ρ 当然也是非降的 Heimite 矩阵. 在每个有限区间上有界变差.

(2) 因为 $\int_{-l}^l \frac{d\rho_{\delta_m jk}(\mu)}{1+\mu^2} \leq A$, 所以由 Helly 积分定理,

$$\int_{-l}^l \frac{d\rho_{jk}(\mu)}{1+\mu^2} \leq A.$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_{jk}(\mu)}{1+\mu^2} \leq A,$$

如果 $\operatorname{Im} \lambda, \operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$, 考虑

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\mu - \lambda|^2} - \frac{1}{|\mu - \lambda_0|^2} \right) d\rho_{\delta_m jk}(\mu) = \frac{P_{\delta_m jk}(\lambda)}{2i\operatorname{Im} \lambda} - \frac{P_{\delta_m jk}(\lambda_0)}{2i\operatorname{Im} \lambda_0},$$

取极限 (用定理 3.7.2 的证明方法) 应有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\mu - \lambda|^2} - \frac{1}{|\mu - \lambda_0|^2} \right) d\rho_{jk}(\mu) = \frac{P_{jk}(\lambda)}{2i\operatorname{Im} \lambda} - \frac{P_{jk}(\lambda_0)}{2i\operatorname{Im} \lambda_0},$$

故

$$\frac{P_{jk}(\lambda)}{2i\operatorname{Im} \lambda} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_{jk}(\mu)}{|\mu - \lambda|^2} = \text{const.}, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0.$$

如果 λ, μ 是 $\rho_{jk}(\lambda)$ 的连续点, 由于收敛在 $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ 的紧集上是一致的, P_{jk} 解析,

积分 $\int_{\lambda}^{\mu} P_{jk}(\sigma + i\varepsilon) d\sigma$ 存在, 而

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\lambda}^{\mu} P_{jk}(\sigma + i\varepsilon) d\sigma = 2i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\lambda}^{\mu} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon d\rho_{jk}(\nu)}{(\nu - \sigma)^2 + \varepsilon^2} \right) d\sigma + 2i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \text{const.} \cdot \varepsilon.$$

由于被积函数是正的, 可以用 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} \text{上式} &= 2i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\lambda}^{\mu} \frac{\varepsilon d\sigma}{(\nu - \sigma)^2 + \varepsilon^2} \right) d\rho_{jk}(\nu) \\ &= 2i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\arctan \frac{\mu - \nu}{\varepsilon} - \arctan \frac{\lambda - \nu}{\varepsilon} \right) d\rho_{jk}(\nu). \end{aligned}$$

利用定理 3.7.2 的处理方法可得

$$\begin{aligned} \text{上式} &= 2i \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\arctan \frac{\mu - \nu}{\varepsilon} - \arctan \frac{\lambda - \nu}{\varepsilon} \right) d\rho_{jk}(\nu) \\ &= 2\pi i (\rho_{jk}(\mu) - \rho_{jk}(\lambda)), \end{aligned}$$

所以在 ρ 的连续点 λ, μ 处,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\rho_m(\mu) - \rho_m(\lambda)) = \rho(\mu) - \rho(\lambda).$$

5.4 一类高阶对称微分算式极限点的 Kauffman 方法

对高阶正则对称微分算式的研究近年来取得了很大的发展, 建立了一些极限点 (limit N) 和极限圆 (limit 2N) 的充分判别准则. 四阶情形有相当丰富的文献.

本节将介绍 R. M. Kauffman 的泛函分析方法, 他处理的是一类具有特定系数的正则对称微分算式

$$L \equiv \sum_{k=0}^N (-1)^k D^k p_k(x) D^k, \quad D = \frac{d}{dx}, \quad x \in [1, \infty),$$

其中, $p_k(x)$ 是一些实幂的幂函数的线性组合

$$p_k(x) = c_k x^{n(k)} + \text{低阶项},$$

而 $c_k \geq 0$.

1968 年, W. N. Everitt 在研究四阶正定微分算式时提出了一个问题: 若

$$L \equiv \sum_{k=0}^N (-1)^k D^k p_k(x) D^k,$$

其中, $p_k \in C^\infty$, $p_k \geq 0$, $p_N > 0$. 是否 $Lf = 0$ 总是恰好有 N 个线性无关的平方可积解? 很多对四阶和六阶情形的研究工作都表明在某些条件下问题的答案是肯定的. R. M. Kauffman 利用他的方法证明了 $N = 2$ 时, 这类微分算式都是极限点的. 当 $N = 3$ 时, 他找到了反例并对 $N > 2$ 给出了这类微分算式的极限点类.

这一方法的关键是去计算 $L^+L - L^2$ (计算 L^2 是机械的, 所以不管到手的微分算式, 这一步总是可以做的), 并证明其中“好”的项从某种意义上说可以最终胜过“坏”的项, 因而可以只考虑这些“好”的项组成的微分算子. 我们将首先给出“最终胜过”的定义, 然后给出一些重要的估计式, 并利用这些估计式证明所考虑的这类微分算式 L , 其平方中的“好”的项最终胜过“坏”的项.

定义 5.4.1 $[1, \infty)$ 上的正则微分算式 L 称为是正的, 记为 $L > 0$. 如果存在 $z > 1$, 使得对任何不恒为零的 $f \in C_0^\infty(z, \infty)$ 都有 $(Lf, f) > 0$. 这里 (\cdot, \cdot) 表示 $L^2[1, \infty)$ 中的内积. 两个正则的微分算式 L 和 M , 如果 $L - M > 0$, 则称 L 大于 M , 记为 $L > M$.

定义 5.4.2 设 L 和 M 是 $[1, \infty)$ 上的两个正则微分算式, 其中, L 是正的. 如果对任何一个 $C_0^\infty(1, \infty)$ 里的序列 $\{f_n\}$, 满足 f_n 不恒为零且 $\text{supp} f_n \subset (n, \infty)$, 都有极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(Mf_n, f_n)}{(Lf_n, f_n)} = 0.$$

则称 L 最终胜过 M , 记为 $L \gg M$.

为了得到一些基本的估计式, 下面将介绍另一个微分算子理论中重要的概念. 叙述某些结论, 但不作过细的讨论, 感兴趣的读者可参阅列出的有关文献.

定义 5.4.3 $[1, \infty)$ 上的 N 阶正则微分算式 $L = \sum_{k=0}^N p_k(x) D^k$ 称为是 disconjugate 的, 如果它的任何非零解在 $[1, \infty)$ 上的零点个数 (零点的重数计算在内) 不超过 N .

例如, D^N 在 $[1, \infty)$ 上是 disconjugate 的, 因为它的非零解是阶数不超过 $N-1$ 的多项式.

引理 5.4.1 一阶正则微分算式是 disconjugate 的.

证明 设 $L \equiv p_1(x)D + p_0(x)$. 如果它的解 y 有一个零点, 则由存在唯一性定理 y 恒等于零, 所以是 disconjugate 的.

引理 5.4.2 如果 N 阶正则微分算式 L 可以表示成一阶正则微分算式的乘积, 则 L 是 disconjugate 的.

证明 对 N 用归纳法. $N = 1$ 时命题成立. 假设 $N-1$ 时命题成立. 下面证明命题对 N 也成立. 设 $L = PQ$, 其中, Q 是个一阶正则微分算式的乘积 $Q = Q_1 \cdots Q_{N-1}$. 设 y 是 L 的非零解, y 有 N 个零点. 如果 α, β 是 y 的相邻的两

个零点,不妨设 $Dy(\alpha) > 0, Dy(\beta) < 0$, 则由 $Q_{N-1}y(\alpha)$ 与 $Q_{N-1}y(\beta)$ 异号, 在 α 与 β 之间必有 $Q_{N-1}y$ 的一个零点. 如果 α 是 y 的二阶零点, 则由 $Dy(\alpha) = 0$ 知 α 是 $Q_{N-1}y$ 的零点. 类似地, 当 α 是 y 的 m 阶零点时, α 必是 $Q_{N-1}y$ 的 $m-1$ 阶零点. 因此当 y 有 N 个零点时, $Q_{N-1}y$ 必有 $N-1$ 个零点. 这样便得到 Qy 有一个零点. 如果 Qy 恒等于零, y 便是 $Qz = 0$ 的一个非零解, 与归纳法假定矛盾. 如果 Qy 不恒等于零, 则 Qy 是一阶方程 $Pz = 0$ 的一个非零解, 又与一阶正则微分算式的 disconjugate 性质矛盾. 所以 y 的零点个数小于 N , L 是 disconjugate 的.

下面叙述两条结论, 只指明出处, 不作详细论证.

引理 5.4.3(Coppel) 设 $L \equiv \sum_{k=0}^N (-1)^k D^k p_k(x) D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上的正则微分算式. 其中, $p_k \in C^\infty, p_N > 0$. 如果 L 是 disconjugate 的, 则对任何 $(1, \infty)$ 的紧子区间 I , 都存在 N 阶的线性微分算式 M , 使得在 I 上 $L = M^+ M$.

证明 请参看 W. A. Coppel, *Disconjugacy*, Lecture Notes in Math., No. 220, 1971, p.77 上的定义, p.80 定理 19 与 p.82 命题 3.

推论 5.4.1 设 $L = \sum_{k=0}^N (-1)^k D^k p_k(x) D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上的正则微分算式, 其中, $p_k \in C^\infty, p_N > 0$. 如果 L 是 disconjugate 的, 则 L 是正的.

证明 对任何不恒为零的 $f \in C_0^\infty(1, \infty)$, 在含 $\text{supp } f$ 的紧子区间上, 通过分部积分便可得

$$(Lf, f) = (M^+ Mf, f) = \|Mf\|^2 > 0.$$

引理 5.4.4(Zettl) 设 $L = \sum_{k=0}^N D^k p_k(x) D^k$, 系数光滑, $1 \leq m \leq N$. 则存在微分算式 $Q \equiv \sum_{k=0}^m q_k(x) D^k, q_k \in C^k$ 使得 $L = PQ$ 的充分必要条件是存在 $Ly = 0$ 的 m 个解 y_1, \dots, y_m 使 Wronski 行列式 $W(y_1, \dots, y_m) \neq 0$.

证明 请参看 Trans. Amer. Math. Soc. 197(1974), 341-353.

引理 5.4.5 存在某个正数 ε , 使得

$$((-1)^k D^k x^n D^k)^2 > \varepsilon D^{2k} x^{2n} D^{2k}.$$

证明 记 $L \equiv ((-1)^k D^k x^n D^k)^2 - \varepsilon D^{2k} x^{2n} D^{2k} = D^k (x^n D^{2k} x^n - \varepsilon D^k x^{2n} D^k) D^k$. 由推论 5.4.1 与引理 5.4.2, 只要证明存在正数 ε 使得 $M \equiv x^n D^{2k} x^n - \varepsilon D^k x^{2n} D^k$ 可以表示成一阶正则微分算式的乘积. 考虑 $My = 0$ 的幂函数解, 由 $Mx^\lambda = 0$ 可得 λ 是某个 $2k$ 阶多项式 $P_\varepsilon(\lambda)$ 的根. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 由 $x^n D^{2k} x^n x^\lambda = 0$, 对应的多项式 $P_0(\lambda)$ 有 $2k$ 个不同的实根. 因为多项式的根连续依赖于它的系数, 所以当 ε 充分小时, $P_\varepsilon(\lambda)$ 也有 $2k$ 个不同的实根. 于是当 ε 充分小时, 方程 $Mx^\lambda = 0$ 有 $2k$ 个

不同的实幂的幂函数解张成它的解空间. 任取其中 $2k-1$ 个, 其 Wronski 行列式乃是一个实幂的多项式, 所以必存在一个数 a , 使得这个 Wronski 行列式在 $[a, \infty)$ 上不为零, 这样由 Zettl 的定理, M 便可以分解成 PQ 的形式, 其中, P 是一阶的正则微分算式. 由于 $Qy=0$ 的解一定适合方程 $My=0$, 所以它也有 $2k-1$ 个不同的实幂的幂函数解组成解空间, 这样 Q 便可以继续分解. 如此便能把 M 分解为一阶正则微分算式的乘积. 引理证毕.

引理 5.4.6 若 $(m-1)^2 > 4\varepsilon$, 则 $-Dx^m D - \varepsilon x^{m-2}$ 在 $[1, \infty)$ 上是 disconjugate 的.

证明 只要证明 $-Dx^m D - \varepsilon x^{m-2}$ 可以表示成两个一阶微分算式的乘积. 为此, 需要证明它有两个不同的实解. 考虑方程

$$(-Dx^m D - \varepsilon x^{m-2})x^\lambda = 0,$$

得

$$-\lambda(\lambda+m-1) - \varepsilon = 0,$$

即

$$\lambda^2 + (m-1)\lambda + \varepsilon = 0,$$

当 $(m-1)^2 > 4\varepsilon$ 时, 微分方程有两个不同的实幂幂函数解, 故 $-Dx^m D - \varepsilon x^{m-2}$ 在 $[1, \infty)$ 上是 disconjugate 的.

引理 5.4.7 设 l 是自然数, $1 \leq l \leq k$, m 是实数. 如果对任何非负整数 r , $0 \leq r < l$ 都有 $m \neq 2r+1$, 则存在某个正数 ε , 使得

$$(-1)^k D^k x^m D^k > \varepsilon (-1)^{k-l} D^{k-l} x^{m-2l} D^{k-l}.$$

证明 对 l 用归纳法. 当 $l=1$ 时, 由假定 $m \neq 1$, 于是

$$(-1)^k D^k x^m D^k - \varepsilon (-1)^{k-1} D^{k-1} x^{m-2} D^{k-1} = (-1)^{k-1} D^{k-1} (-Dx^m D - \varepsilon x^{m-2}) D^{k-1},$$

因为 $(m-1)^2 > 0$, 故可取到 $\varepsilon > 0$ 使得 $(m-1)^2 > 4\varepsilon$, 由引理 5.4.6, $-Dx^m D - \varepsilon x^{m-2}$ 在 $[1, \infty)$ 上是 disconjugate 的, 因此 $(-1)^k D^k x^m D^k - \varepsilon (-1)^{k-1} D^{k-1} x^{m-2} D^{k-1}$ 也是 disconjugate 的. 利用 Coppel 定理便有

$$(-1)^k D^k x^m D^k > \varepsilon (-1)^{k-1} D^{k-1} x^{m-2} D^{k-1},$$

命题对 $l=1$ 成立. 假定命题对 $l=n < k$ 都成立. 下面证明命题对 $l=n+1$ 也成立. 考虑

$$\begin{aligned} & (-1)^{k-n} D^{k-n} x^{m-2n} D^{k-n} - \varepsilon_1 (-1)^{k-n-1} x^{m-2n-2} D^{k-n-1} \\ &= (-1)^{k-n-1} D^{k-n-1} (-Dx^{m-2n} D - \varepsilon_1 x^{m-2n-2}) D^{k-n-1}, \end{aligned}$$

由引理 5.4.7 假定, 对任何非负整数 $r, 0 \leq r < n+1$, 都有 $m \neq 2r+1$, 因此 $m-2n \neq 1$. 所以当 $4\varepsilon_1 < (m-2n-1)^2$ 时, $-Dx^{m-2n}D - \varepsilon_1 x^{m-2n-2}$ 在 $[1, \infty)$ 上是 disconjugate 的. 于是 $(-1)^{k-n} D^{k-n} x^{m-2n} D^{k-n} - \varepsilon_1 (-1)^{k-n-1} D^{k-n-1} x^{m-2n-2} D^{k-n-1}$ 也是 disconjugate 的. 由 Coppel 定理,

$$(-1)^{k-n} D^{k-n} x^{m-2n} D^{k-n} > \varepsilon_1 (-1)^{k-n-1} D^{k-n-1} x^{m-2n-2} D^{k-n-1},$$

可是根据归纳法假设, 存在 $\varepsilon > 0$ 使

$$(-1)^k D^k x^m D^k > \varepsilon (-1)^{k-n} D^{k-n} x^{m-2n} D^{k-n},$$

故

$$(-1)^k D^k x^m D^k > \varepsilon \varepsilon_1 (-1)^{k-n-1} D^{k-n-1} x^{m-2n-2} D^{k-n-1},$$

归纳法步骤完成. 引理 5.4.7 得证.

引理 5.4.8 设 $\varepsilon > 0$, α 是实数, k 是非负整数, 则

$$(-1)^k D^k x^\alpha D^k \gg (-1)^k D^k x^{\alpha-\varepsilon} D^k.$$

证明 因为当 $f \in C_0^\infty(1, \infty)$ 且 $\text{supp } f \subset (n, \infty)$ 时,

$$\frac{((-1)^k D^k x^{\alpha-\varepsilon} D^k f, f)}{((-1)^k D^k x^\alpha D^k f, f)} = \frac{\int_n^\infty x^{\alpha-\varepsilon} |D^k f|^2 dx}{\int_n^\infty x^\alpha |D^k f|^2 dx} \leq \frac{\frac{1}{n^\varepsilon} \|x^{\frac{\alpha}{2}} D^k f\|^2}{\|x^{\frac{\alpha}{2}} D^k f\|^2} = \frac{1}{n^\varepsilon},$$

故得.

引理 5.4.9 设 (1) k, j 是非负整数, $k > j$;

(2) α, β 是实数, $\alpha - 2k < \beta - 2j$;

(3) l 是一个正整数, $l \leq k+j$, 并且对任何非负整数 $r, 0 \leq r < l-1$, 都有 $\alpha + \beta \neq 2r+1$;

则

$$D^{2j} x^{2\beta} D^{2j} + (-1)^{k+j} D^{k+j} x^{\alpha+\beta} D^{k+j} \gg D^{k+j-l} x^{\alpha+\beta-2l} D^{k+j-l}.$$

证明 分 3 种情形讨论.

(1) 当 $l = k-j$ 时, 估计式由引理 5.4.8 可得. 因为 $\alpha + \beta - 2l = \alpha - 2k + \beta + 2j < 2\beta$.

(2) 当 $l > k-j$ 时, 记 $l = k-j+m$, 则 $m \geq 1$ 而 $k+j-l = 2j-m$. 取 $\varepsilon > 0$ 使得 $\alpha + \beta + \varepsilon$ 是无理数且 $\alpha + \varepsilon - 2k < \beta - 2j$. 因为 $\alpha + \beta + \varepsilon - 2(k-j) < 2\beta$. 所以由引理 5.4.8 得

$$D^{2j} x^{2\beta} D^{2j} \gg D^{2j} x^{\alpha+\beta+\varepsilon-2(k-j)} D^{2j}.$$

而 $\alpha + \beta + \varepsilon$ 是无理数, 利用引理 5.4.7, 存在正数 δ , 使得

$$D^{2j} x^{\alpha+\beta+\varepsilon-2(k-j)} D^{2j} > \delta (-1)^{2j-m} D^{2j-m} x^{\alpha+\beta+\varepsilon-2(k-j)-2m} D^{2j-m}.$$

于是

$$\begin{aligned} D^{2j} x^{2\beta} D^{2j} &\gg (-1)^{2j-m} D^{2j-m} x^{\alpha+\beta+\varepsilon-2(k-j+m)} D^{2j-m} \\ &= (-1)^{k+j-l} D^{k+j-l} x^{\alpha+\beta+\varepsilon-2l} D^{k+j-l}, \end{aligned}$$

故最后得所要的估计式.

(3) 当 $l < k-j$ 时, 证明是对 l 用归纳法. 假设 $l \geq n$ 时命题都成立, 现证明 $l = n-1 \geq 1$ 时命题也成立. 这时

$$\begin{aligned} D^{k+j-n+1} x^{\alpha+\beta-2n+2} D^{k+j-n+1} &= D^{k+j-n} x^{\alpha+\beta-2n+2} D^{k+j-n+1} \\ &\quad + a D^{k+j-n} x^{\alpha+\beta-2n+1} D^{k+j-n+1} \\ &= D^{k+j-n} x^{\alpha+\beta-2n+2} D^{k+j-n+2} + a H D, \end{aligned}$$

这里 $a = \alpha + \beta - 2n + 2$, $H = D^{k+j-n} x^{\alpha+\beta-2n+1} D^{k+j-n}$. 先看第 1 项, 对任何 $f \in C_0^\infty(1, \infty)$, 用分部积分与 Schwarz 不等式可得

$$|(D^{k+j-n} x^{\alpha+\beta-2n+2} D^{k+j-n+2} f, f)| \leq \|x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-n} D^{k+j-n} f\| \|x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-n+2} D^{k+j-n+2} f\|,$$

其中,

$$\|x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-n} D^{k+j-n} f\|^2 = ((-1)^{k+j-n} D^{k+j-n} x^{\alpha+\beta-2n} D^{k+j-n} f, f),$$

而

$$\|x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-n+2} D^{k+j-n+2} f\|^2 = ((-1)^{k+j-n+2} D^{k+j-n+2} x^{\alpha+\beta-2n+4} D^{k+j-n+2} f, f),$$

由条件 (3), 利用引理 5.4.7, 存在 $\frac{1}{C} > 0$, 使得

$$(-1)^{k+j} D^{k+j} x^{\alpha+\beta} D^{k+j} > \frac{1}{C} (-1)^{k+j-n+2} D^{k+j-n+2} x^{\alpha+\beta-2n+4} D^{k+j-n+2},$$

于是

$$\|x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-n+2} D^{k+j-n+2} f\|^2 < C \|x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} D^{k+j} f\|^2,$$

这样对任何序列 $\{f_n\} \subset C_0^\infty(1, \infty)$, f_n 不恒为零, $\text{supp } f_n \subset (n, \infty)$ 由归纳假设便有

$$\begin{aligned} &\frac{|(D^{k+j-n} x^{\alpha+\beta-2n+2} D^{k+j-n+2} f_n, f_n)|}{(D^{2j} x^{2\beta} D^{2j} f_n, f_n) + ((-1)^{k+j} D^{k+j} x^{\alpha+\beta} D^{k+j} f_n, f_n)} \\ &\leq \left[\frac{C((-1)^{k+j-n} D^{k+j-n} x^{\alpha+\beta-2n} D^{k+j-n} f_n, f_n)}{(D^{2j} x^{2\beta} D^{2j} f_n, f_n) + ((-1)^{k+j} D^{k+j} x^{\alpha+\beta} D^{k+j} f_n, f_n)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

即

$$D^{2j}x^{2\beta}D^{2j} + (-1)^{k+j}D^{k+j}x^{\alpha+\beta}D^{k+j} \gg D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+2}.$$

再考虑第 2 项, 因为

$$(HDf_n, f_n) = \overline{(f_n, HDf_n)} = \overline{(-DHf_n, f_n)},$$

所以

$$((HD - DH)f_n, f_n) = 2\operatorname{Re}(HDf_n, f_n),$$

而

$$\begin{aligned} HD - DH &= D^{k+j-n}(x^{\alpha+\beta-2n+1}D - Dx^{\alpha+\beta-2n+1})D^{k+j-n} \\ &= (\alpha + \beta - 2n + 1)D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n}D^{k+j-n}, \end{aligned}$$

由归纳法假定

$$D^{2j}x^{2\beta}D^{2j} + (-1)^{k+j}D^{k+j}x^{\alpha+\beta}D^{k+j} \gg HD - DH.$$

这样, 对任何 $C_0^\infty(1, \infty)$ 的序列 $\{f_n\}$, f_n 不恒为零, $\operatorname{supp} f_n \subset (n, \infty)$. 由于

$$(D^{k+j-n+1}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+1}f_n, f_n)$$

总是实的, 所以有

$$\begin{aligned} & |(D^{k+j-n+1}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+1}f_n, f_n)| \\ &= |\operatorname{Re}(D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+2}f_n, f_n) + a\operatorname{Re}(HDf_n, f_n)| \\ &\leq |(D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+2}f_n, f_n)| + \left|\frac{a}{2}\right| |((HD - DH)f_n, f_n)|. \end{aligned}$$

于是最后得到

$$D^{2j}x^{2\beta}D^{2j} + (-1)^{k+j}D^{k+j}x^{\alpha+\beta}D^{k+j} \gg D^{k+j-n+1}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+1}.$$

归纳法步骤完成, $l < k - j$ 时估计式也成立. 引理证毕.

定理 5.4.1 设 $L = \sum_{k=0}^N (-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上满足下列条件的正则微分算式:

(1) $c_k \geq 0$;

(2) 当 $k > j$ 时, $n(k) - 2k < n(j) - 2j$,

则 $L^2 - R \gg R$, 其中,

$$R = L^2 - \left[\sum_{k=0}^N c_k^2 (D^k x^{n(k)} D^k)^2 + \sum_{k \neq j} (-1)^{k+j} c_k c_j D^{k+j} x^{n(k)+n(j)} D^{k+j} \right].$$

注 这里方括号里的那些项是 L^2 中的“好”的项, 而 R 则是 L^2 中“坏”的项的和.

证明 显然

$$L^2 = \sum_{k=0}^N c_k^2 (D^k x^{n(k)} D^k)^2 + \sum_{k \neq j} c_k c_j [(-1)^k D^k x^{n(k)} D^k] [(-1)^j D^j x^{n(j)} D^j]$$

由于 $[(-1)^k D^k x^{n(k)} D^k] [(-1)^j D^j x^{n(j)} D^j] + [(-1)^j D^j x^{n(j)} D^j] [(-1)^k D^k x^{n(k)} D^k]$ 是对称的微分算式, 所以可以写成

$$\sum_{r=0}^{k+j} (-1)^r D^r f_r D^r,$$

其中, $f_r = a_r x^{n(k)+n(j)-2(k+j-r)}$, 而 $a_{k+j} = 1$. 于是

$$\begin{aligned} & c_k c_j \{ [(-1)^k D^k x^{n(k)} D^k] [(-1)^j D^j x^{n(j)} D^j] \\ & + [(-1)^j D^j x^{n(j)} D^j] [(-1)^k D^k x^{n(k)} D^k] \} \\ & = (-1)^{k+j} c_k c_j D^{k+j} x^{n(k)+n(j)} D^{k+j} + c_k c_j \sum_{r=0}^{k+j-1} (-1)^r a_r D^r x^{n(k)+n(j)-2(k+j-r)} D^r. \end{aligned}$$

如果 $n(k) + n(j) - 2(k+j-r) = 1$, 即 $n(k) + n(j) = 2(k+j-r) + 1$, 则 $a_{r-1} = 0$, 因为当这一项作用在函数上时, 对函数所求得最高阶导数是 $2(r-1)$, 因此必须还要对系数 $x^{n(k)+n(j)}$ 求 $2(k+j) - 2(r-1) = 2(k+j-r) + 2$ 阶导数, 可是

$$n(k) + n(j) = 2(k+j-r) + 1 < 2(k+j-r) + 2,$$

所以这一项不会出现. 这样当 $a_r \neq 0$ 时, 对一切 $s > r$, 必然有

$$n(k) + n(j) \neq 2(k+j-s) + 1.$$

于是当 $a_r \neq 0$ 时, 在引理 5.4.9 中, 若 $k > j$, 取 $\alpha = n(k), \beta = n(j), l = k+j-r$, 因为对任何非负整数 $n, 0 \leq n < l-1 = k+j-r-1$, 把 n 写成 $k+j-s$, 则 $s > r$, 应有

$$\alpha + \beta = n(k) + n(j) \neq 2(k+j-s) + 1 - 2n + 1.$$

所以由引理 5.4.9 可得

$$\begin{aligned} D^{2j} x^{2n(j)} D^{2j} + (-1)^{k+j} D^{k+j} x^{n(k)+n(j)} D^{k+j} & \gg D^{k+j-l} x^{n(k)+n(j)-2l} D^{k+j-l} \\ & = D^r x^{n(k)+n(j)-2(k+j-r)} D^r. \end{aligned}$$

注意到对某个正数 ε 有

$$(D^j x^{n(j)} D^j)^2 > \varepsilon D^{2j} x^{2n(j)} D^{2j}.$$

故最后可得

$$L^2 - R \gg R.$$

定理证毕.

定义 5.4.4 设 $L = \sum_{k=0}^N p_k(x) D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上的正则微分算式, 如果对任何的 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$ (或 $\mathcal{D}(T_1(L))$), 都有

$$p_k^{(j)} D^{k-j} f \in L^2[1, \infty), \quad j = 0, 1, \dots, k; k = 0, 1, \dots, N,$$

则称 $T_0(L)$ (或 $T_1(L)$) 是分离的.

引理 5.4.10 设 L 和 M 都是 $[1, \infty)$ 上的正则微分算式, M 的阶数 $\leq L$ 的阶数. 如果存在某个 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$, 使得 $Mf \notin L^2[1, \infty)$, 则必存在 $C_0^\infty(1, \infty)$ 的序列 $\{f_n\}$, f_n 不恒为零, $\text{supp } f_n \subset (n, \infty)$ 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L^+ L f_n, f_n)}{(M^+ M f_n, f_n)} = 0.$$

证明 如果存在常数 K , 使得

$$\|Mg\| \leq K(\|g\| + \|Lg\|), \quad g \in C_0^\infty(1, \infty),$$

则对任何 $h \in \mathcal{D}(T_0(L))$, 由于有 $\{g_n\} \subset C_0^\infty(1, \infty)$ 使得在 $L^2[1, \infty)$ 中 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = h$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Lg_n = Lh$, 故 $\{Mg_n\}$ 是 Cauchy 列, 根据 $T_0(M)$ 的定义乃得 $h \in \mathcal{D}(T_0(M))$. 这样便有 $\mathcal{D}(T_0(L)) \subset \mathcal{D}(T_0(M))$, 与假设不符. 因此必存在 $\{g_n\} \subset C_0^\infty$, 使得

$$\|Mg_n\| > n(\|g_n\| + \|Lg_n\|).$$

令 $h_n = g_n / (\|g_n\| + \|Lg_n\|)$, 则得一序列 $\{h_n\} \subset C_0^\infty(1, \infty)$, 使得 $\{\|h_n\|\}, \{\|Lh_n\|\}$ 都有界, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Mh_n\| = \infty$, 取 $\psi \in C^\infty$ 使 ψ 在一个紧区间外都等于 1, 于是 $1 - \psi$ 有紧支集. 考虑 $C_0^\infty(1, \infty)$ 里的序列 $\{\psi h_n\}$, 显然 $\{\|\psi h_n\|\}$ 有界. 另外由于 h_n 是初值问题

$$\begin{cases} Ly = Lh_n, \\ D^k h_n(1) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

的解, 其中, N 是 L 的阶数. 利用常数变易法可得

$$\begin{pmatrix} h_n(x) \\ Dh_n(x) \\ \vdots \\ D^{N-1}h_n(x) \end{pmatrix} = \int_1^x \Phi(x) \Phi^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ Lh_n(t) \end{pmatrix} dt,$$

其中,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_N(x) \\ D\varphi_1(x) & D\varphi_2(x) & \cdots & D\varphi_N(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^{N-1}\varphi_1(x) & D^{N-1}\varphi_2(x) & \cdots & D^{N-1}\varphi_N(x) \end{pmatrix}$$

是对应于方程 $Ly = 0$ 的一个基本解组 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)$ 的 Wronski 矩阵. 于是

$$|D^k h_n(x)| = \left| \int_1^x \frac{\sum_{j=1}^N \varphi_j^{(k-1)}(x) W_j(\varphi_1, \dots, \varphi_N)(t)}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_N)(t)} Lh_n(t) dt \right|.$$

$W_j(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ 是以 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ 换 Wronski 行列式 $W(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ 中第 j 列得到的行列式. 因此在 $\text{supp}(1 - \psi)$ 上有

$$|D^k h_n(x)| \leq A \int_1^b |Lh_n(t)| dt \leq A\sqrt{b-1} \|Lh_n\|, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

这里 b 使得 $\text{supp}(1 - \psi) \subset [1, b]$. 于是

$$\{D^k h_n(x) | k = 0, 1, \dots, N-1, n = 1, 2, \dots, x \in \text{supp}(1 - \psi)\}$$

是有界的. 这样注意到

$$L(1 - \psi)h_n = \sum_{k=0}^N p_k D^k ((1 - \psi)Lh_n) = (1 - \psi)Lh_n + \sum_{k=1}^N p_k \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} D^{k-j} h_n D^j (1 - \psi).$$

便可得 $\{\|L(1 - \psi)h_n\|\}$ 与 $\{\|M(1 - \psi)h_n\|\}$ 都是有界的. 于是 $\{\|L(\psi h_n)\|\}$ 是有界的, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M(\psi h_n)\| = \infty$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L^+ L(\psi h_n), \psi h_n)}{(M^+ M(\psi h_n), \psi h_n)} = 0.$$

剩下的只要取一串上述形状的 $\{\psi_m\}$, 使得 $\text{supp} \psi_m \subset (m, \infty)$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L^+ L(\psi_m h_n), \psi_m h_n)}{(M^+ M(\psi_m h_n), \psi_m h_n)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

所以可以取到 n_m , 使得

$$\left| \frac{(L^+ L(\psi_m h_{n_m}), \psi_m h_{n_m})}{(M^+ M(\psi_m h_{n_m}), \psi_m h_{n_m})} \right| < \frac{1}{2^m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

令 $f_m = \psi_m h_{n_m}$, 则 $f_m \in C^\infty$, $\text{supp} f_m \subset (m, \infty)$ 且

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(L^+ L f_m, f_m)}{(M^+ M f_m, f_m)} = 0.$$

证毕.

定理 5.4.2 设 $L \equiv \sum_{k=0}^N (-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上满足

(1) $c_k \geq 0$;

(2) 当 $k > j$ 时, $n(k) - 2k < n(j) - 2j$;

的正则微分算式, 则 $T_0(L)$ 是分离的.

证明 (1) 先证明对一切 $0 \leq k \leq N$, $c_k > 0$ 都有

$$x^{n(k)} D^{2k} f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathcal{D}(T_0(L)).$$

记 $M = x^{n(k)} D^{2k}$. 如果存在 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$, 使得 $Mf \notin L^2[1, \infty)$, 则由引理 5.4.10, 必存在 $C_0^\infty(1, \infty)$ 的序列 $\{f_n\}$, $\text{supp} f_n \subset (n, \infty)$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L^2 f_n, f_n)}{(M^+ M f_n, f_n)} = 0.$$

由于 $L^2 - R \gg R$, 所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(R f_n, f_n)}{((L^2 - R) f_n, f_n)} = 0,$$

于是当 n 充分大时,

$$|(R f_n, f_n)| \leq \frac{1}{2} |((L^2 - R) f_n, f_n)|,$$

这样由

$$|(L^2 f_n, f_n)| \geq |((L^2 - R) f_n, f_n)| - |(R f_n, f_n)| \geq \frac{1}{2} |((L^2 - R) f_n, f_n)|$$

便可推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((L^2 - R) f_n, f_n)}{(M^+ M f_n, f_n)} = 0.$$

可是对某个正数 ε , $(D^k x^{n(k)} D^k)^2 > \varepsilon D^{2k} x^{2n(k)} D^{2k} = \varepsilon M^+ M$. 当 n 充分大时, 应有

$$\frac{((L^2 - R)f_n, f_n)}{(M^+ M f_n, f_n)} > \varepsilon > 0.$$

因而导致矛盾. 故对一切 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$ 均有 $x^{n(k)} D^{2k} f \in L^2[1, \infty)$.

(2) 剩下再证明对一切 $0 \leq k \leq N, c_k > 0$, 当 $1 \leq j \leq 2k$ 时都有

$$x^{n(k)-j} D^{2k-j} f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathcal{D}T_0(L).$$

分以下两种情况来证:

(i) 若 j 具有下述性质: 任何非负整数 $t, 0 \leq t < j$ 都满足 $2n(k) \neq 2t + 1$, 这种情形可以用 (1) 的方法去证. 因为由引理 5.4.5 和引理 5.4.7, 对某个正数 ε 有

$$(D^k x^{n(k)} D^k)^2 > \varepsilon (-1)^{2k-j} D^{2k-j} x^{2n(k)-2j} D^{2k-j}.$$

(ii) 若存在某个非负整数 $t, 0 \leq t < j$ 使得 $2n(k) = 2t + 1$, 这时对 t 来说, 一切满足 $0 \leq s < t$ 的非负整数 s 都有 $2n(k) \neq 2s + 1$, 所以由 (i) 可得

$$x^{n(k)-t} D^{2k-t} f = \sqrt{x} D^{2k-t} f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathcal{D}(T_0(L)).$$

特别地, 对一切 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$ 都有 $D^{2k-t} f \in L^2[1, \infty)$. 于是利用 Goldberg 的先验估计^①, 对 $t < j \leq 2k$ 便有

$$\|D^{2k-j} f\|^2 \leq K(\|f\|^2 + \|D^{2k-t} f\|^2), \quad f \in \mathcal{D}(T_0(L)),$$

而 $n(k) - j = n(k) - t - (j - t) = \frac{1}{2} - (j - t) < 0$, 故

$$x^{n(k)-j} D^{2k-j} f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathcal{D}(T_0(L)).$$

定理证毕.

定义 5.4.5 设 A 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 上的闭线性算子. 则 A 的定义域 $\mathcal{D}(A)$ 赋以图模 $\|f\|_1 = \|f\| + \|Af\|$ 可成一个 Banach 空间. 设 B 是 \mathcal{H} 上的线性算子, $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$, 如果 B 是空间 $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_1)$ 到空间 \mathcal{H} 的有界算子, 则称 B 关于 A 相对有界. 如果 B 是空间 $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_1)$ 到空间 \mathcal{H} 的紧算子, 则称 B 关于 A 相对紧.

^① 见 Goldberg^[14] 定理 VI.6.1. 若 $f \in L^2[1, \infty)$, f 有直到 $n-1$ 阶的连续导数, $f^{(n-1)}$ 局部绝对连续且 $f^{(n)} \in L^2[1, \infty)$, 则 $f^{(k)} (k = 0, 1, \dots, n)$ 属于 $L^2[1, \infty)$, 并且对任何正数 ε , 存在 $K = K(\varepsilon)$, 使得一切这样的函数 f 均满足

$$\|f^{(k)}\|^2 \leq K\|f\|^2 + \varepsilon\|f^{(n)}\|^2, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

引理 5.4.11 设 L 和 M 都是 $[1, \infty)$ 上的正则微分算式. 如果对任何 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$, 都有 $Mf \in L^2[1, \infty)$, 则 M 关于 $T_0(L)$ 相对有界, 即存在常数 K , 使得

$$\|Mf\| \leq K(\|f\| + \|Lf\|), \quad f \in \mathcal{D}(T_0(L)).$$

证明 如果 $f_n \rightarrow f((\mathcal{D}(T_0(L)), \|\cdot\|_1))$, 而 $Mf_n \rightarrow g(L^2[1, \infty))$, 则显然 $f_n \rightarrow f(L^2[1, \infty))$, 由 $T_1(M)$ 是闭算子知 $f \in \mathcal{D}(T_1(M))$ 并且 $g = Mf$. 因此 M 是空间 $(\mathcal{D}(T_0(L)), \|\cdot\|_1)$ 到空间 $L^2[1, \infty)$ 的闭线性算子, 这样由闭图像定理使得 M 是有界算子. 证毕.

引理 5.4.12 设 L 和 M 都是 $[1, \infty)$ 上正则微分算式, $T_0(L)$ 有闭值域. 如果 M 的阶数 $< L$ 的阶数且 M 关于 $T_0(L)$ 相对紧, 则 $T_0(L + M)$ 有闭值域且

$$\mathcal{D}(T_0(L + M)) = \mathcal{D}(T_0(L)),$$

$$\text{nullity}T_1(L^+ + M^+) = \text{nullity}T_1(L^+).$$

证明 ① (1) $\mathcal{D}(T_0(L + M)) = \mathcal{D}(T_0(L))$.

设 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$, 则存在序列 $\{f_n\} \subset C_0^\infty(1, \infty)$ 使得在 $L^2[1, \infty)$ 中, $f_n \rightarrow f, Lf_n \rightarrow Lf$, 于是在 Banach 空间 $(\mathcal{D}(T_0(L)), \|\cdot\|_1)$ 中 $f_n \rightarrow f$, 因为相对紧算子一定是相对有界的, 所以在 $L^2[1, \infty)$ 中, $Mf_n \rightarrow Mf$, 即 $f \in \mathcal{D}(T_0(L + M))$. 故 $\mathcal{D}(T_0(L)) \subset \mathcal{D}(T_0(L + M))$.

反过来, 由于闭线性算子与相对紧算子的和还是闭线性算子 (见文献 [14] 第 V 章 §3 定理 V.3.7 的证明), 若以 Q 表示 M 在 $\mathcal{D}(T_0(L))$ 上的限制, 则 $T_0(L) + Q$ 是闭线性算子, $\mathcal{D}(T_0(L) + Q) = \mathcal{D}(T_0(L))$.

如果 $f \in \mathcal{D}(T_0(L + M))$, 则有序列 $\{f_n\} \subset C_0^\infty(1, \infty)$, 使得在 $L^2[1, \infty)$ 上 $f_n \rightarrow f$ 且 $(L + M)f_n \rightarrow (L + M)f$, 即 $\{(T_0(L) + Q)f_n\}$ 收敛, 由 $T_0(L) + Q$ 的闭性使得 $f \in \mathcal{D}(T_0(L) + Q) = \mathcal{D}(T_0(L))$, 所以又有 $\mathcal{D}(T_0(L + M)) \subset \mathcal{D}(T_0(L))$, 两者综合起来得 $\mathcal{D}(T_0(L + M)) = \mathcal{D}(T_0(L))$.

(2) 由于 $T_0(L + M) = T_0(L) + Q$, 其中, Q 关于 $T_0(L)$ 相对紧, 所以由 [14]berg[15] 第 V 章 §3 定理 V.3.7, $T_0(L + M)$ 有闭值域.

(3) $\text{nullity}T_1(L^+ + M^+) = \text{nullity}T_1(L^+)$.

因为 $\text{ran}T_0(L)$ 闭, 所以由 $T_0(L)^* = T_1(L^+)$ 得

$$\text{ran}T_0(L) \oplus \ker T_1(L^+) = L^2[1, \infty).$$

故 $T_0(L)$ 的亏指标为

$$\beta(T_0(L)) = \dim L^2[1, \infty) / \text{ran}T_0(L) = \text{nullity}T_1(L^+),$$

(1) 本引理用到较多的泛函分析知识, 有关内容请读者参考文献 [14] 的第 IV 章 §2 与第 V 章 §3.

而由存在唯一性定理, $T_0(L)$ 的核指标为

$$\alpha(T_0(L)) = \dim \ker T_0(L) = \text{nullity} T_0(L) = 0,$$

于是 $T_0(L)$ 的指标是有限的:

$$\text{index} T_0(L) = \alpha(T_0(L)) - \beta(T_0(L)) = -\text{nullity} T_1(L^+) < \infty,$$

故 $T_0(L)$ 是 Fredholm 算子. 因为 Q 关于 $T_0(L)$ 相对紧, 所以由文献 [14] 第 V 章 §3 定理 V.3.7. 对于相对紧的摄动, 算子的指标不改变, 故

$$\text{index} T_0(L + M) = \text{index} T_0(L).$$

同样地, $\alpha(T_0(L + M)) = 0, \beta(T_0(L + M)) = \text{nullity} T_1(L^+ + M^+)$. 所以最后得

$$\text{nullity} T_1(L^+ + M^+) = \text{nullity} T_1(L^+).$$

引理证毕.

引理 5.4.13 设 L 和 M 都是 $[1, \infty)$ 上的正则微分算式, $T_0(L)$ 有闭值域. 如果 M 的阶数 $< L$ 的阶数且存在正数 ε , 使得对于一切 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$ 都有 $x^\varepsilon Mf \in L^2[1, \infty)$, 则 M 关于 $T_0(L)$ 相对紧.

证明 (1) $T_0(L)^{-1}$ 存在且为从 $\text{ran} T_0(L)$ 到 $L^2[1, \infty)$ 的有界线性算子.

由微分方程的存在唯一性定理, 如果 $f \in \ker T_0(L)$, 则 $f = 0$, 所以 $T_0(L)^{-1}$ 存在. 因为 $\text{ran} T_0(L)$ 闭, 而 $T_0(L)$ 是闭算子, 故由闭图像定理, $T_0(L)^{-1}$ 是有界的.

(2) $x^\varepsilon M T_0(L)^{-1}$ 是从 $\text{ran} T_0(L)$ 到 $L^2[1, \infty)$ 的有界线性算子.

只需证明算子 $x^\varepsilon M T_0(L)^{-1}$ 有闭图像即可. 设在空间 $L^2[1, \infty)$ 中,

$$f_n \rightarrow f, \quad x^\varepsilon M T_0(L)^{-1} f_n \rightarrow g,$$

其中, $f_n = L h_n, h_n \in \mathcal{D}(T_0(L))$. 因为 $\text{ran} T_0(L)$ 闭, 所以 $f = L h, h \in \mathcal{D}(T_0(L))$. 由 $T_0(L)^{-1}$ 有界可得 $h_n \rightarrow h$. 按假定, $h, h_n \in \mathcal{D}(T_1(x^\varepsilon M))$, 而 $T_1(x^\varepsilon M)$ 是闭算子, 故 $g = x^\varepsilon M h = x^\varepsilon M T_0(L)^{-1} f$, 即 $x^\varepsilon M T_0(L)^{-1}$ 的图像闭.

(3) 考虑算子 $x^{-\varepsilon}$, 由于对任何 $f \in L^2[1, \infty)$ 都有

$$\|x^{-\varepsilon} f\|^2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^{2\varepsilon}} |f|^2 dx \leq \|f\|^2,$$

所以这是一个有界线性算子. 取 $\varphi_n \in C^\infty[1, \infty)$, 使得 $0 \leq \varphi_n(x) \leq 1$ 且

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq n, \\ 0, & n+1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

于是

$$(1 - \varphi_n)x^{-\varepsilon} = \begin{cases} 0, & 1 \leq x \leq n, \\ x^{-\varepsilon}, & n+1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

由 $|(1 - \varphi_n)x^{-\varepsilon}| \leq \frac{1}{n^\varepsilon}$ 可得

$$\|(x^{-\varepsilon} - x^{-\varepsilon}\varphi_n)f\|^2 = \int_1^\infty |(1 - \varphi_n)x^{-\varepsilon}|^2 |f|^2 dx \leq \frac{1}{n^{2\varepsilon}} \|f\|^2,$$

即

$$\|x^{-\varepsilon} - x^{-\varepsilon}\varphi_n\| \leq \frac{1}{n^\varepsilon},$$

所以算子序列 $\{x^{-\varepsilon}\varphi_n\}$ 一致收敛到算子 $x^{-\varepsilon}$. 于是

$$\|x^{-\varepsilon}\varphi_n x^\varepsilon MT_0(L)^{-1} - x^{-\varepsilon} x^\varepsilon MT_0(L)^{-1}\| \leq \|x^{-\varepsilon}\varphi_n - x^{-\varepsilon}\| \|x^\varepsilon MT_0(L)^{-1}\| \rightarrow 0,$$

即算子序列 $\{\varphi_n MT_0(L)^{-1}\}$ 一致收敛到 $MT_0(L)^{-1}$.

(4) $\varphi_n MT_0(L)^{-1}$ 都是紧算子, 所以 $MT_0(L)^{-1}$ 是紧算子.

为了让符号简单些, 下面证明 $\varphi MT_0(L)^{-1}$ 是紧算子, 其中, φ 是支集含于 $[1, b]$ 内的 C^∞ 函数. 设 $\{f_n\}$ 是 $\text{ran } T_0(L)$ 的有界集. 如果证明了 $\{\varphi MT_0(L)^{-1} f_n\}$ 也是 Sobolev 空间 $W^{1,2}[1, \infty)$ 的有界集, 则由嵌入定理便可得 $\{\varphi MT_0(L)^{-1} f_n\}$ 是 $W^{0,2}[1, \infty) = L^2[1, \infty)$ 的紧集. 设 $f_n = Lg_n, g_n \in \mathcal{D}(T_0(L))$, 因为 $\|f_n\| = \|Lg_n\|$ 有界, 所以利用常数变易法 (与引理 5.4.10 中的证明相同) 便可得

$$|D^k g_n(x)| \leq C \|Lg_n\|, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, 1 \leq x \leq b,$$

其中, C 是某个常数, N 是 L 的阶数. 因为 $(\varphi MT_0(L)^{-1} f_n)' = (\varphi M g_n)' = \varphi' M g_n + \varphi (M g_n)'$, 而由

$$D^N g_n = \frac{1}{p_N} \left(Lg_n - \sum_{k=0}^{N-1} p_k D^k g_n \right), \quad L \equiv \sum_{k=0}^N p_k D^k$$

可得

$$\left(\int_1^b |D^N g_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \|Lg_n\|,$$

按定义 $\|\varphi MT_0(L)^{-1} f_n\|_{W^{1,2}}^2 = \|\varphi M g_n\|^2 + \|(\varphi M g_n)'\|^2$, 根据假定的条件, M 关于 $T_0(L)$ 相对有界, 所以存在常数 K 使得

$$\|Mg\| \leq K(\|g\| + \|Lg\|), \quad g \in \mathcal{D}(T_0(L)).$$

于是

$$\|\varphi M g_n\|^2 = \int_1^b |\varphi|^2 |M g_n|^2 dx \leq A(\|g_n\| + \|L g_n\|)^2,$$

而

$$\begin{aligned} \|(\varphi M g_n)'\|^2 &= \|\varphi' M g_n + \varphi(M g_n)'\|^2 \leq (\|\varphi' M g_n\| + \|\varphi(M g_n)'\|)^2 \\ &\leq \left[B_1(\|g_n\| + \|L g_n\|) + B_2 \sum_{k=0}^N \left(\int_1^b |D^k g_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &\leq B(\|g_n\| + \|L g_n\|)^2, \end{aligned}$$

故可得

$$\|\varphi M T_0(L)^{-1} f_n\|_{W^{1,2}}^2 \leq \sqrt{A+B}(\|g_n\| + \|L g_n\|) \leq \sqrt{A+B}(1 + \|T_0(L)^{-1}\|)\|f_n\|,$$

即 $\{\varphi M T_0(L)^{-1} f_n\}$ 是 $W^{1,2}[1, \infty)$ 的有界集.

(5) 注意到 $T_0(L)$ 是从 $(\mathcal{D}(T_0(L)), \|\cdot\|_1)$ 到 $\text{ran } T_0(L)$ 的有界线性算子, 便可得 M 关于 $T_0(L)$ 的相对紧性质. 引理得证.

引理 5.4.14 设 $L = \sum_{k=r}^N (-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上满足下列条件的正则

微分算式

(1) $c_r > 0$;

(2) $c_k \geq 0$;

(3) 当 $k > j$ 时, $n(k) - 2k < n(j) - 2j$;

则存在正数 ε , 使得对任何 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$ 和任何 $k > r, c_k > 0$, 都有

$$x^\varepsilon x^{n(k)-2k-j} D^{2k-j} f \in L^2[1, \infty), \quad j = 1, \dots, 2k.$$

证明 只需证明对每个 $k > r, c_k > 0$ 和每个 $j, 1 \leq j \leq 2k$ 都有这样的正数 ε 存在即可. 假设 $k > r, c_k > 0$, 对 $j = 2k$, 因为 $n(k) - 2k < n(r) - 2r$, 而由于 $T_0(L)$ 是分离的, 对任何 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$ 都有 $x^{n(r)-2r} f \in L^2[1, \infty)$, 因此只要取 $0 < \varepsilon < (n(r) - 2r) - (n(k) - 2k)$ 便有 $x^\varepsilon x^{n(k)-2k} f \in L^2[1, \infty)$. 当 $1 \leq j \leq 2k-1$ 时, 用有限归纳法来证明. 假定 $j \geq l \geq 2$ 时引理已成立, 证明 $j = l-1$ 时引理也成立. 以下记 $\alpha = n(k) - l$.

(1) 先考虑 $f \in C_0^\infty(1, \infty)$ 的情形. 这时对任何 $\varepsilon > 0$ 均有 $x^\varepsilon x^{n(k)-(l-1)} D^{2k-(l-1)} f \in L^2[1, \infty)$. 下面推导一个不等式以便能过渡到一般的 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$.

$$\begin{aligned} \|x^\varepsilon x^{n(k)-(l-1)} D^{2k-(l-1)} f\|^2 &= |(x^\varepsilon x^{\alpha+1} D^{2k-(l-1)} f, x^\varepsilon x^{\alpha+1} D^{2k-(l-1)} f)| \\ &= |(D^{2k-l+1} x^{2\varepsilon+2\alpha+2} D^{2k-l+1} f, f)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |2\varepsilon + 2\alpha + 2| |(D^{2k-l} x^{2\varepsilon+2\alpha+1} D^{2k-l+1} f, f)| + |(D^{2k-l} x^{2\varepsilon+2\alpha+2} D^{2k-l+2} f, f)| \\ &\leq |2\varepsilon + 2\alpha + 2| \|x^{\alpha+2\varepsilon} D^{2k-l} f\| \|x^{\alpha+1} D^{2k-l+1} f\| + \|x^{\alpha+2\varepsilon} D^{2k-l} f\| \|x^{\alpha+2} D^{2k-l+2} f\|. \end{aligned}$$

由归纳法的假定, 存在正数 δ , 使得对一切 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$ 都有 $x^\delta x^{n(k)-l} D^{2k-l} f \in L^2[1, \infty)$, 即 $x^{\delta+\alpha} D^{2k-l} f \in L^2[1, \infty)$, 因此算子 $T = x^{\delta+\alpha} D^{2k-l}$ 关于 $T_0(L)$ 相对有界, 存在常数 K_1 , 使得

$$\|x^{\delta+\alpha} D^{2k-l} f\| \leq K_1(\|f\| + \|Lf\|), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(L)).$$

另外, 由定理 5.4.2, $T_0(L)$ 是分离的, 所以对一切 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$, 都有

$$x^{n(k)-(l-1)} D^{2k-(l-1)} f = x^{\alpha+1} D^{2k-l+1} f \in L^2[1, \infty),$$

$$x^{n(k)-(l-2)} D^{2k-(l-2)} f = x^{\alpha+2} D^{2k-l+2} f \in L^2[1, \infty).$$

于是算子 $T' = x^{\alpha+1} D^{2k-l+1}$ 和 $T'' = x^{\alpha+2} D^{2k-l+2}$ 都关于 $T_0(L)$ 相对有界, 存在常数 K_2 , 使得

$$\|x^{\alpha+1} D^{2k-l+1} f\| \leq K_2(\|f\| + \|Lf\|), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(L)),$$

$$\|x^{\alpha+2} D^{2k-l+2} f\| \leq K_2(\|f\| + \|Lf\|), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(L)).$$

这样, 只要 $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$ 便有常数 K , 使得

$$\|x^\varepsilon x^{n(k)-(l-1)} D^{2k-(l-1)} f\|^2 \leq K(\|f\| + \|Lf\|)^2, \quad f \in C_0^\infty(1, \infty).$$

(2) 对于任何 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$, 由最小算子的定义, 存在 $\{f_n\} \subset C_0^\infty(1, \infty)$, 使得 $f_n \rightarrow f$ 并且 $Lf_n \rightarrow Lf$, 于是由

$$\|x^\varepsilon x^{n(k)-(l-1)} D^{2k-(l-1)} (f_n - f_m)\|^2 \leq K(\|f_n - f_m\| + \|Lf_n - Lf_m\|)^2 \rightarrow 0$$

和算子 $T_1(x^\varepsilon x^{n(k)-(l-1)} D^{2k-(l-1)})$ 是闭的便得 $f \in \mathscr{D}(T_1(x^\varepsilon x^{n(k)-(l-1)} D^{2k-(l-1)}))$, 即

$$x^\varepsilon x^{n(k)-(l-1)} D^{2k-(l-1)} f \in L^2[1, \infty).$$

归纳法步骤就此完成. 引理得证.

引理 5.4.15 设 L 是 $[1, \infty)$ 上的正则微分算式, 如果存在 $c > 0$ 使得对任何 $f \in C_0^\infty(1, \infty)$ 都有 $|(Lf, f)| \geq c\|f\|^2$, 则 $T_0(L)$ 有闭值域.

证明 设 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$, 由最小算子的定义, 存在 $\{f_n\} \subset C_0^\infty(1, \infty)$, 使得 $f_n \rightarrow f$ 并且 $Lf_n \rightarrow Lf$, 这样由不等式

$$|(Lf_n, f_n)| \geq c\|f_n\|^2$$

取极限便可得

$$|(Lf, f)| \geq c \|f\|^2.$$

假若有序列 $f_n \subset \mathcal{D}(T_0(L))$, 使得 $Lf_n \rightarrow g$, 则由

$$|(L(f_n - f_m), f_n - f_m)| \geq c \|f_n - f_m\|^2$$

知

$$\|Lf_n - Lf_m\| \geq c \|f_n - f_m\|,$$

即 $\{f_n\}$ 是 $L^2[1, \infty)$ 的 Cauchy 列, 因此必存在 $f \in L^2[1, \infty)$ 使得 $f_n \rightarrow f$. 由于 $T_0(L)$ 是闭算子, 所以 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$ 并且 $g = Lf$. 这表示 $T_0(L)$ 的值域是闭的.

引理 5.4.16 设 $[1, \infty)$ 上的正则微分算式 $L = \sum_{k=0}^N (-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 满足下列条件:

- (1) $c_0 > 0, n(0) \geq 0$;
- (2) $c_k \geq 0$;
- (3) 当 $k > j$ 时, $n(k) - 2k < n(j) - 2j$.

如果 $T_1(L)f = 0$, 则对任何自然数 n 都有 $x^n f \in L^2[1, \infty)$.

证明 令 $R = x^{-n} L x^n, M = R - L$. 则利用 Leibnitz 法则将高阶导数展开可得

$$M = \sum_{k=1, c_k > 0, 1 \leq j \leq 2k}^N b_{kj} x^{n(k)-j} D^{2k-j},$$

由引理 5.4.14, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任何 $g \in \mathcal{D}(T_0(L))$, 都有 $x^\varepsilon M g \in L^2[1, \infty)$. 因为对任何 $g \in C_0^\infty(1, \infty)$,

$$|(Lg, g)| = \sum_{k=0}^N c_k \|x^{\frac{n(k)}{2}} D^k g\|^2 \geq c_0 \|g\|^2,$$

所以 $T_0(L)$ 有闭值域, 这样 M 就关于 $T_0(L)$ 相对紧. 于是根据引理 5.4.12,

$$\text{nullity } T_1(R^+) = \text{nullity } T_1(L).$$

但是 $R^+ = x^n L x^{-n}$, 故若 $g \in \ker T_1(R^+)$, 便有 $x^{-n} g \in \ker T_1(L)$. 作 $\ker T_1(R^+)$ 到 $\ker T_1(L)$ 的映射 $\tau: \tau g = x^{-n} g$, 显然 τ 线性且保持线性无关, 由于这两个空间维数相等, τ 必是映上的. 这样对 $f \in \ker T_1(L)$ 便有 $g \in \ker T_1(R^+)$ 使得 $\tau g = f$, 即 $f = x^{-n} g$, 故 $x^n f = g \in L^2[1, \infty)$, 证毕.

引理 5.4.17 设 $L = \sum_{k=0}^N (-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上的正则微分算式, 满足下列条件:

- (1) $c_0 > 0, n(0) \geq 0$;
 (2) $c_k \geq 0$;
 (3) 当 $k > j$ 时, $n(k) - 2k < n(j) - 2j$.

如果 L 是极限点的^①, 而 $T_1(L)f = 0$, 则对任何非负整数 r 与 k 都有 $x^r D^k f \in L^2[1, \infty)$.

证明 $k = 0$ 的情形前面已经证明了.

(1) 令 $R = x^{-n} L x^n, S = R - L$, 这里 n 是自然数. 由于对任何 $f \in C_0^\infty(1, \infty)$ 通过分部积分可得

$$(Lf, f) = \sum_{k=0}^N c_k \|x^{\frac{n(k)}{2}} D^k f\|^2 \geq c_0 \|f\|^2,$$

所以 $\text{ran} T_0(L)$ 闭. 再由引理 5.4.13 与引理 5.4.14, S 关于 $T_0(L)$ 相对紧. 所以由引理 5.4.12, $\mathcal{D}(T_0(R)) = \mathcal{D}(T_0(L))$, $\text{ran} T_0(R)$ 闭且

$$\text{nullity} T_1(R^+) = \text{nullity} T_1(L).$$

因为 $S^+ = R^+ - L$ 与 S 是同一类型的算子, 所以 S^+ 关于 $T_0(L)$ 也相对紧. 于是 $\mathcal{D}(T_0(R^+)) = \mathcal{D}(T_0(L))$, $\text{ran} T_0(R^+)$ 闭且

$$\text{nullity} T_1(R) = \text{nullity} T_1(L).$$

这样根据定理 1.2.1 与 L 是极限点的便知 R 与 R^+ 也都是极限点的. 因此 $T_1(R)$ 与 $T_0(R)$ 的定义域以及 $T_1(L)$ 与 $T_0(L)$ 的定义域都只差紧支集的 C^∞ 函数. 由于 $\mathcal{D}(T_0(R)) = \mathcal{D}(T_0(L))$, 所以 $\mathcal{D}(T_1(R)) = \mathcal{D}(T_1(L))$.

(2) 若 $f \in \ker T_1(L)$, 则对任何自然数 n , $x^n f \in L^2[1, \infty)$, 故 $g = x^n f \in \ker T_1(R)$. 于是 $g \in \mathcal{D}(T_1(L))$, 由引理 1.2.4, 存在 $g_1 \in \mathcal{D}(T_0(L))$ 与 $g_2 \in C^\infty$, $\text{supp} g_2$ 紧, 使得 $g = g_1 + g_2$, 根据定理 5.4.2, $T_0(l)$ 分离, $x^{n(N)-k} D^{2N-k} g_1 \in L^2[1, \infty) (k = 0, 1, \dots, 2N)$ 因此也有

$$x^{n(N)-k} D^{2N-k} g \in L^2[1, \infty) \quad k = 0, 1, \dots, 2N.$$

(3) 对任何非负整数 r , $x^r Df = x^r D(x^{-n} g) = x^{r-n} Dg - n x^{r-n-1} g$. 对给定的 r , 选 n 充分大使 $r - n - 1 < 0, r - n < n(N) - 2N + 1$, 则由 (2) 便可得 $x^r Df \in L^2[1, \infty) (r = 0, 1, 2, \dots)$. 同样地, 对非负整数 r , 由

$$x^r D^2 f = x^r D^2 (x^{-n} g) = x^{r-n} D^2 g - 2n x^{r-n-1} Dg + n(n+1) x^{r-n-2} g,$$

① 这一假定其实是不必要的, 因为下面将证明这一类微分算式都是极限点的.

取 n 充分大使得 $r-n-2 < 0, r-n-1 < n(N)-2N+1$, 则由 (2) 又可得 $x^r D^2 f \in L^2[1, \infty) (r=0, 1, 2, \dots)$. 如此作下去最后可得 $x^r D^{2N} f \in L^2[1, \infty) (r=0, 1, 2, \dots)$.

(4) 若 $f \in \ker T_1(L)$. 由于幂函数在 $[1, \infty)$ 上无穷可微, 所以由 $DLf = 0$ 得 $D^{2N+1}f$ 存在且

$$c_N x^{n(N)} D^{2N+1} f + Mf = 0,$$

其中, M 是一个阶数 $\leq 2N$ 的多项式系数微分算式. 由 (3) 知

$$x^r Mf \in L^2[1, \infty), \quad r=0, 1, 2, \dots.$$

故

$$x^r D^{2N+1} f \in L^2[1, \infty), \quad r=0, 1, 2, \dots.$$

按这样作下去便可证得引理.

引理 5.4.18 设 $L = \sum_{k=0}^N p_k(x) D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上的正则微分算式. 如果 f 满足

下列条件:

- (1) $f \in L^2[1, \infty)$;
- (2) $D^k f(1) = 0, k=0, 1, \dots, N-1$;
- (3) 对任何 $k=0, 1, \dots, N$, 当 $0 \leq j \leq k$ 时, 都有 $p_k(x) D^{k-j} f \in L^2[1, \infty)$;

则 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$.

证明 取 $h \in C^\infty(-\infty, \infty)$, 使得

$$h(x) = \begin{cases} 1, & -\infty < x \leq 0, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

在 $[1, \infty)$ 上令

$$h_n(x) = h(x-n), \quad n=1, 2, \dots,$$

则 $h_n(x)$ 在 $[n+1, \infty)$ 上为零. 当 n 趋于无穷时, $\|h_n f - f\| = \left(\int_n^\infty |h_n - 1|^2 |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ 趋于零. 另外, 由

$$L(h_n f) = h_n Lf + \sum_{k=1}^N p_k \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} D^j h_n D^{k-j} f,$$

当 n 趋于无穷时, 显然有

$$\left\| \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} D^j h_n \cdot p_k D^{k-j} f \right\|^2 \leq C \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k \int_n^\infty |p_k D^{k-j} f|^2 dx \rightarrow 0,$$

故 n 趋于无穷时,

$$\begin{aligned}\|L(h_n f) - Lf\| &\leq \|h_n Lf - Lf\| + \left\| \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} D^j h_n \cdot p_k D^{k-j} f \right\| \\ &= \left(\int_n^\infty |h_n - 1|^2 |Lf|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left\| \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} D^j h_n \cdot p_k D^{k-j} f \right\|\end{aligned}$$

趋于零, 于是 $L(h_n f)$ 在 $L^2[1, \infty)$ 中收敛到 Lf .

下面证明 $h_n f \in \mathcal{D}(T_0(L))$. 由条件 (2), $D^k(h_n f)(1) = 0, k = 0, 1, \dots, N-1$ 并且 $\text{supp } h_n f \subset [1, n+2]$, 如果记 M 为 L 在区间 $[1, n+2]$ 上的限制, 则由于

$$\mathcal{D}(T_0(M)) = \{f \in \mathcal{D}(T_1(M)) | D^k f(1) = D^k f(n+2) = 0, k = 0, 1, \dots, N-1\},$$

$h_n f$ 限制在 $[1, n+2]$ 上显然是在 $T_0(M)$ 的定义域中. 故存在 $C_0^\infty(1, n+2)$ 的序列 $\{f_m\}$ 使得在空间 $L^2[1, n+2]$ 上, $f_m \rightarrow h_n f, Lf_m \rightarrow L(h_n f)$. 将 f_m 零扩张到整个 $[1, \infty)$ 上, 则 $f_m \in C_0^\infty(1, \infty)$ 且在空间 $L^2[1, \infty)$ 上, $\{f_m\} \rightarrow h_n f, Lf_m \rightarrow L(h_n f)$, 这表示 $h_n f \in \mathcal{D}(T_0(L))$.

由于 $T_0(L)$ 是闭算子, 而在空间 $L^2[1, \infty)$ 中 $h_n f \rightarrow f, L(h_n f) \rightarrow Lf$ 所以 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$. 证毕.

引理 5.4.19 设 $L = \sum_{k=0}^N (-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上满足下列条件的正则微分算式:

- (1) $c_k \geq 0, c_0 > 0, n(0) \geq 2I$;
- (2) 当 $k > j$ 时, $n(k) - 2k < n(j) - 2j$;
- (3) L 是极限点的;

则 $M = (-1)^I D^I L D^I$ 也属于极限点型, $T_0(M)$ 有闭值域且 $T_1(M)$ 是分离的.

证明 (1) $\text{ran } T_0(M)$ 闭, 因为对 $f \in C_0^\infty(1, \infty)$ 有

$$\begin{aligned}|(Mf, f)| &= \left| \left(\sum_{k=0}^N (-1)^{k+I} c_k D^{k+I} x^{n(k)} D^{k+I} f, f \right) \right| \\ &= \sum_{k=0}^N c_k \int_1^\infty x^{n(k)} |D^{k+I} f|^2 dx \\ &\geq c_0 \|x^{\frac{n(0)}{2}} D^I f\|^2 = c_0 \left((-1)^I D^I x^{n(0)} D^I f, f \right),\end{aligned}$$

由引理 5.4.7, 存在正数 ε 使得 $(-1)^I D^I x^{n(0)} D^I f > \varepsilon x^{n(0)-2I}$, 故 $|(Mf, f)| \geq c_0 \varepsilon \|f\|^2$.

(2) 由 L 的平方可积解可以构造 M 的平方可积解. 设 $g \in \ker T_1(L)$, 由引理 5.4.16, $x^r g \in L^2[1, \infty)$ ($r = 0, 1, 2, \dots$), 令

$$g^*(x) = \int_1^x g(t) dt,$$

因为

$$\int_1^\infty |g(x)| dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} |xg(x)| dx \leq \left\| \frac{1}{x} \right\| \|xg\|.$$

所以可以设 $a_1 = \int_1^\infty g(x) dx$. 于是

$$\begin{aligned} |g^*(x) - a_1| &= \left| \int_x^\infty g(t) dt \right| \leq \left(\int_x^\infty \frac{dt}{t^{2r}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^\infty t^{2r} |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C^* x^{\frac{1}{2}-r}, \quad r = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

由此可知

$$x^r (g^* - a_1) \in L^2[1, \infty), \quad r = 0, 1, 2, \dots.$$

再令

$$g^{**}(x) = \int_1^x (g^*(t) - a_1) dt.$$

同样地, $g^* - a_1$ 绝对可积, 故 $a_2 = \int_1^\infty (g^*(x) - a_1) dx$ 存在, 而

$$\begin{aligned} |g^{**}(x) - a_2| &= \left| \int_x^\infty (g^*(t) - a_1) dt \right| \\ &\leq \left(\int_x^\infty \frac{dt}{t^{2r}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^\infty t^{2r} |g^*(t) - a_1|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C^{**} x^{\frac{1}{2}-r}, \end{aligned}$$

其中, $r = 1, 2, \dots$. 所以

$$x^r (g^{**} - a_2) \in L^2[1, \infty), \quad r = 0, 1, 2, \dots.$$

这样做过 I 次以后便可得到一个函数 $f(x)$, 使得

$$D^I f = g,$$

而 $x^r (f - p) \in L^2[1, \infty)$ ($r = 0, 1, 2, \dots$), 其中, p 是一个 $I - 1$ 阶的多项式. 记 $h(x) = f(x) - p(x)$, 则 $h \in \ker T_1(M)$. 从构造可知

$$x^r D^k h \in L^2[1, \infty), \quad k = 0, 1, \dots, I; \quad r = 0, 1, 2, \dots.$$

但是由引理 5.4.17, $x^r D^k g \in L^2[1, \infty)$, $k, r = 0, 1, 2, \dots$, 故

$$x^r D^k h \in L^2[1, \infty), \quad k, r = 0, 1, 2, \dots.$$

(3) 由于 $\text{ran} T_0(L)$ 显然是闭的, 而 L 属于极限点型, 故

$$\text{nullity} T_1(L) = N.$$

对 $\ker T_1(L)$ 的一组基 g_1, \dots, g_N , 可以构造出相应的一组 M 的平方可积解 h_1, \dots, h_N , 它们也是线性无关的. 对每一个 h_j , 取 $\varphi_j \in C^\infty$, $\text{supp } \varphi_j \subset [1, 2]$ 且

$$D^k \varphi_j(1) = D^k h_j(1), \quad k = 0, 1, \dots, 2N + 2I - 1.$$

这样由引理 5.4.18, $h_j - \varphi_j \in \mathcal{D}(T_0(M))$, $j = 1, \dots, N$.

对任何 $f \in \ker T_1(M)$, 因为

$$h_j - \varphi_j \in \mathcal{D}(T_1(M)^*) = \mathcal{D}(T_0(M)), \quad 0 = (Mf, h_j - \varphi_j) = (f, M(h_j - \varphi_j)).$$

于是由 Green 公式知

$$(Mf, h_j - \varphi_j) - (f, M(h_j - \varphi_j)) = [f, h_j - \varphi_j]_1^\infty = [f, h_j - \varphi_j](\infty) = [f, h_j](\infty).$$

可是 $f \in \ker T_1(M)$, $h_j \in \ker T_1(M)$, 由 Green 公式又有

$$0 = (Mf, h_j) - (f, Mh_j) = [f, h_j]_1^\infty = -[f, h_j](1).$$

另外, 对任何 x^k ($k = 0, 1, \dots, I - 1$), 由 $Mx^k = 0$ 知

$$0 = \int_1^x Mt^k \cdot \overline{h_j(t)} dt - \int_1^x t^k \overline{Mh_j(t)} dt = [x^k, h_j]_1^x,$$

即

$$[x^k, h_j](x) = [x^k, h_j](1).$$

但是 $x^r D^k h_j \in L^2[1, \infty)$, $k, r = 0, 1, 2, \dots$, 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [x^k, h_j](x) = 0,$$

于是

$$[x^k, h_j](1) = 0, \quad j = 1, \dots, N; \quad k = 0, 1, \dots, I - 1.$$

(4) 考虑由 $\ker T_1(M)$ 与 $1, x, \dots, x^{I-1}$ 张成的子空间 V , 后者不属于 $L^2[1, \infty)$, 所以 V 的维数是 $I + \text{nullity} T_1(M)$. 作解空间 $\{f \mid Mf = 0\}$ 到 C^{2N+2I} 的映射

$$\sigma f = (f(1), Df(1), \dots, D^{2N+2I-1}f(1))^T.$$

由存在唯一性定理, σ 保持线性无关, 所以 $\sigma(V)$ 的维数也是 $I + \text{nullity} T_1(M)$. 而 $\sigma\{ \text{由 } h_1, \dots, h_N \text{ 生成的子空间} \}$ 的维数是 N . 因为 Lagrange 双线性型用 \mathbb{C}^{2N+2I} 里的内积表示乃是

$$[f, g](1) = (\sigma f, (F_{kl}) \sigma g),$$

其中, (F_{kl}) 是非退化的 $2N + 2I$ 阶矩阵, 故由

$$[f, h_j](1) = 0, \quad f \in \ker T_1(M); \quad j = 1, \dots, N,$$

$$[x^k, h_j](1) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, I-1; j = 1, \dots, N$$

知 $(\sigma f, (F_{kl}) \sigma h_j) = 0, f \in V, j = 1, \dots, N$. $\sigma(V)$ 的维数是 $I + \text{nullity} T_1(M)$. $\{(F_{kl}) \sigma h_j, j = 1, \dots, N\}$ 张成的子空间维数是 N . 这两个子空间直交, 于是

$$I + \text{nullity} T_1(M) \leq N + 2I,$$

即

$$\text{nullity} T_1(M) \leq N + I.$$

注意到 $\text{ran} T_0(M)$ 闭, 由定理 1.2.1 与定理 1.2.3 便得

$$d(M) = \text{nullity} T_1(M) = N + I.$$

M 是极限点的.

(5) 因为 M 满足定理 5.4.2 的条件, $T_0(M)$ 是分离的, 而 M 属于极限点型, $\mathcal{S}(T_1(M))$ 与 $\mathcal{S}(T_0(M))$ 仅差紧支集的 C^∞ 函数, 所以 $T_1(M)$ 也分离. 引理证毕.

定理 5.4.3 设 $L = \sum_{k=0}^N (-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上满足下列条件的正则

微分算式:

- (1) $c_k \geq 0$;
- (2) 当 $k > j$ 时, $n(k) - 2k < n(j) - 2j$;

则 L 属于极限点型, 且 $T_1(L)$ 是分离的.

证明 (1) 由定理 5.4.2, $T_0(L)$ 分离, 所以如果能证明 L 属于极限点型, $T_1(L)$ 与 $T_0(L)$ 的定义域便只差紧支集的 C^∞ 函数. 于是 $T_1(L)$ 也是分离的.

(2) 下面用归纳法来证明 L 属于极限点型.

(i) $N = 1$ 时, 因为 $c_0 x^{n(0)}$ 有下界, 所以 L 是极限点的.

(ii) 设定理在 $\leq N$ 时都成立, 考虑 $N + 1$ 的情形. 这时

$$L = -DMD + c_0 x^{n(0)}, \quad M = \sum_{j=0}^N (-1)^j a_j D^j x^{m(j)} D^j,$$

其中, $K \leq N, a_j \geq 0, a_r > 0$, 显然当 $s > t$ 时, $m(s) - 2s < m(t) - 2t$.

如果证明了 $-DM D$ 是极限点的, 则 L 便是极限点的. 因为

(a) $n(0) \geq 0$ 时, 对 $f \in C_0^\infty(1, \infty)$, 用分部积分可知

$$(Lf, f) \geq c_0(x^{n(0)}f, f) \geq c_0|f|^2,$$

所以 $\text{ran} T_0(L)$ 闭. 若 $g \in \ker T_1(L)$, 由引理 5.4.16, 对任何自然数 n , $x^n g \in L^2[1, \infty)$. 特别地, $x^{n(0)}g \in L^2[1, \infty)$. 于是 $-DM Dg$ 也属于 $L^2[1, \infty)$. 这样, 利用推论 1.2.3 便可得 L 是极限点的.

(b) $n(0) < 0$ 时, 可以考虑 $L+1$. 因为由定理 1.2.2, L 为极限点的充分必要条件是 $L+1$ 为极限点. 而 $\text{ran} T_0(L+1)$ 显然是闭的, 由

$$L+1 = -DM D + (c_0 x^{n(0)} + 1)$$

对任何 $g \in \ker T_1(L+1)$, 因为

$$\int_1^\infty (c_0 x^{n(0)} + 1)^2 |g|^2 dx \leq (c_0 + 1)^2 \|g\|^2,$$

这样利用推论 1.2.3, $L+1$ 便是极限点的.

下面来证明 $-DM D$ 是极限点的:

① 如果 $m(r) \geq 2r+2$, 由于

$$DM D = (-1)^{r+1} D^{r+1} \left(\sum_{l=0}^{K-r} (-1)^l a_{r+l} D^l x^{m(r+l)} D^l \right) D^{r+1}.$$

根据归纳法假定,

$$\sum_{l=0}^{K-r} (-1)^l a_{r+l} D^l x^{m(r+l)} D^l$$

是极限点的, 利用引理 5.4.19, 便知 $-DM D$ 也是极限点的.

② 如果 $m(r) < 2r+2$, 只要证明 $-DM D + 1$ 属于极限点型即可. 先取 $\alpha > 0$, 使得 $m(r) + 2\alpha = 2r+2$, 令

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{j=r}^K (-1)^{j+1} a_j D^{j+1} x^{m(j)+2\alpha} D^{j+1} + x^{2\alpha} \\ &= -D \left(\sum_{j=r}^K (-1)^j a_j D^j x^{m(j)+2\alpha} D^j \right) D + x^{2\alpha} \\ &= U + V, \end{aligned}$$

因为由归纳法假定与引理 5.4.19, U 是极限点的, V 显然也是极限点的. 当 $g \in \ker T_1(Q)$ 时, 由引理 5.4.16 可得 $Vg = x^{2\alpha}g \in L^2[1, \infty)$, 于是 $Ug \in L^2[1, \infty)$. 利用推论 1.2.3 便可得 Q 是极限点的.

考虑

$$R = x^\alpha(-DM D + 1)x^\alpha = x^\alpha \left(\sum_{j=r}^K (-1)^{j+1} a_j D^{j+1} x^{m(j)} D^{j+1} \right) x^\alpha + x^{2\alpha},$$

有

$$\begin{aligned} R - Q &= \sum_{j=r}^K (-1)^{j+1} a_j \left(x^\alpha D^{j+1} x^{m(j)} D^{j+1} x^\alpha - D^{j+1} x^{m(j)+2\alpha} D^{j+1} \right) \\ &= \sum_{j=r}^K (-1)^{j+1} a_j \left(\sum_{s=1}^{2j+2} b_s x^{m(j)+2\alpha-s} D^{2j+2-s} \right). \end{aligned}$$

因为 Q 满足引理 5.4.14 的条件, 所以存在正数 ε 使得

$$\mathcal{S}(T_0(Q)) \subset \mathcal{S}(T_1(x^\varepsilon(R - Q))).$$

即 $R - Q$ 关于 $T_0(Q)$ 相对紧, 于是由引理 5.4.12 知 $\text{ran} T_0(R)$ 闭且

$$\text{nullity} T_1(R^+) = \text{nullity} T_1(Q^+),$$

这样便得

$$\begin{aligned} d(R) &= \frac{1}{2} [\text{nullity} T_1(R^+) + \text{nullity} T_1(R)] = \text{nullity} T_1(R^+) = \text{nullity} T_1(Q^+) \\ &= \frac{1}{2} [\text{nullity} T_1(Q^+) + \text{nullity} T_1(Q)] = d(Q) = K + 1, \end{aligned}$$

因此 R 是极限点的.

如果 $f \in \ker T_1(-DM D + 1)$, 则 $x^{-\alpha}f \in \ker T_1(R)$, 故

$$\text{nullity} T_1(-DM D + 1) \leq \text{nullity} T_1(R) = K + 1,$$

显然 $\text{ran} T_0(-DM D + 1)$ 是闭的, 故

$$d(-DM D + 1) = \text{nullity} T_1(-DM D + 1) \leq K + 1,$$

再应用定理 1.2.3, 便得 $d(-DM D + 1) = K + 1$, $-DM D + 1$ 是极限点的. 于是归纳法步骤完成. 定理得证.

定理 5.4.4 设 $L \equiv \sum_{k=0}^N (-1)^k D^k p_k(x) D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上满足下列条件的正则微分算式:

(1) $p_k(x)$ 都是具实系数的实幂函数的有限线性组合,

$$p_N(x) = c_N x^{n(N)}, \quad c_N > 0,$$

$$p_k(x) = c_k x^{n(k)} + \text{低阶项}, \quad c_k \geq 0;$$

(2) 如果记 $r = \max \{n(k) - 2k, c_k > 0\}$, 集合 $\{k \mid c_k > 0, n(k) - 2k = r\}$ 是单点集;

则 (i) 存在正则微分算式

$$M \equiv \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k D^k x^{m(k)} D^k$$

使得 $a_k \geq 0$, 当 $k > j$ 时, $m(k) - 2k < m(j) - 2j$. $L - M$ 关于 $T_0(M)$ 相对紧;

(ii) L 属于极限点型且 $T_1(L)$ 是分离的.

证明 (1) 构造 M : 取 $a_N = c_N, m(N) = n(N)$, 如果

$$l = \max \{k \mid p_k(x) \neq 0, n(k) - 2k > n(N) - 2N\}$$

存在, 则对 $l < k < N$ 取 $a_k = 0$, 而 $a_l = c_l, m(l) = n(l)$. 否则对一切 $k < N$, 都取 $a_k = 0$.

假若 l 存在, 下一步当 $l_1 = \max \{k \mid k < l, p_k(x) \neq 0, n(k) - 2k > n(l) - 2l\}$ 存在时, 对 $l_1 < k < l$, 取 $a_k = 0$, 而 $a_{l_1} = c_{l_1}, m(l_1) = n(l_1)$. 否则对一切 $k < l$, 都取 $a_k = 0$.

按照这样做下去便可以得到 M . 显然 M 的最后一项是

$$(-1)^{k_0} c_{k_0} D^{k_0} x^{n(k_0)} D^{k_0}, \text{ 其中, } n(k_0) - 2k_0 = r.$$

M 满足本定理的要求, 所以由定理 5.4.3, M 属于极限点型, $T_1(M)$ 分离. 这个 M 乃是微分算式 L 的主要部分.

(2) 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对一切 $f \in \mathcal{D}(T_0(M))$, 都有 $x^\varepsilon (L - M)f \in L^2[1, \infty)$: 考虑 $L - M$ 中的一项 $c D^j x^l D^j$, 分两种情形讨论.

(i) $l < n(j)$ 的情形. 这时这一项来自 $(-1)^j D^j p_j(x) D^j$, 根据 M 的构造, 存在 $k > j$ 使得 $n(k) - 2k \geq n(j) - 2j$, 而 $(-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 M 的一项.

如果 $k > k_0$, 则由引理 5.4.14 可得

$$x^\varepsilon D^j x^l D^j f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathcal{D}(T_0(M)).$$

如果 $k = k_0$, 则由条件 (2), $n(k_0) - 2k_0 > n(j) - 2j$, 由于 $T_1(M)$ 分离, 所以也存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$x^\varepsilon D^j x^l D^j f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathcal{D}(T_0(M)).$$

(ii) $l < n(j)$ 的情形.

如果 $(-1)^j c_j D^j x^{n(j)} D^j$ 是 M 的一项, 则由 $T_1(M)$ 分离, 可知存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$x^\varepsilon D^j x^l D^j f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathcal{D}(T_0(M)).$$

如果 $(-1)^j c_j D^j x^{n(j)} D^j$ 不是 M 的一项, 则由 M 的构造, 存在 $k > j$, 使得 $n(k) - 2k \geq n(j) - 2j$, 而 $(-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 M 的一项, 于是由 $T_1(M)$ 分离, 也存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$x^\varepsilon D^j x^l D^j f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathcal{D}(T_0(M)).$$

(3) L 是极限点的.

(i) 如果 $r \geq 0$, 即 $n(k_0) - 2k_0 \geq 0$, 由引理 5.4.7, 存在正数 ε , 使得

$$(-1)^{k_0} c_{k_0} D^{k_0} x^{n(k_0)} D^{k_0} > \varepsilon x^{n(k_0)-2k_0} = \varepsilon x^r,$$

于是对 $f \in C_0^\infty(1, \infty)$, 有

$$|(Mf, f)| = \sum_{k=0}^N a_k \|x^{\frac{m(k)}{2}} D^k f\|^2 \geq \varepsilon \|f\|^2,$$

因此 $T_0(M)$ 有闭值域, 由 (2) 与引理 5.4.13, $L - M$ 关于 $T_0(M)$ 相对紧, 这样由引理 5.4.12 便可得 $\mathcal{D}(T_0(L)) = \mathcal{D}(T_0(M))$ 且 L 是极限点的.

(ii) 如果 $r < 0$, 考虑 $M + 1$, 它仍是极限点的. 此时 $T_0(M + 1)$ 有闭值域, 但 $\mathcal{D}(T_0(M + 1)) = \mathcal{D}(T_0(M))$, 由 (2) 与引理 5.4.13, $L - M$ 关于 $T_0(M + 1)$ 相对紧, 利用引理 5.4.12, $\mathcal{D}(T_0(L + 1)) = \mathcal{D}(T_0(M))$, $L + 1$ 是极限点的, 故 L 为极限点.

(4) $L - M$ 关于 $T_0(M)$ 相对紧. 只考虑 $r < 0$ 的情形. 设 $\{f_n\}$ 是空间 $(\mathcal{D}(T_0(M)), \|\cdot\|_1)$ 的有界集, 因为

$$\|f_n\|_1^* = \|f_n\| + \|(M + 1)f_n\| \leq 2\|f_n\|_1,$$

所以 $\{f_n\}$ 也是空间 $(\mathcal{D}(T_0(M + 1)), \|\cdot\|_1^*)$ 的有界集. 可是 $L - M$ 关于 $T_0(M + 1)$ 相对紧, 故可以抽出子列 $\{f_{n_k}\}$ 使 $\{(L - M)f_{n_k}\}$ 在 $L^2[1, \infty)$ 中收敛.

(5) $T_1(L)$ 分离. 由于 $T_0(M)$ 分离, 而 $\mathcal{D}(T_0(L)) = \mathcal{D}(T_0(L + 1)) = \mathcal{D}(T_0(M))$, 根据 M 的构造可得 $T_0(L)$ 的分离性质. 再利用 L 是极限点的以及定理 1.2.6, 使得 $T_1(L)$ 的分离性质. 定理证毕.

定理 5.4.5 设 $L \equiv \sum_{k=0}^N (-1)^k D^k p_k(x) D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上满足下列条件的正则微分算式:

(1) $p_k(x)$ 是实系数的实幂函数的有限线性组合,

$$p_k(x) = c_k x^{n(k)} + \text{低阶项}, \quad c_k \geq 0, \\ c_N > 0;$$

(2) 如果记 $r = \max \{n(k) - 2k \mid c_k > 0\}$, 集合 $\{k \mid c_k > 0, n(k) - 2k = r\}$ 是单点集;

则 (i) 存在正则微分算式

$$M \equiv \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k D^k x^{m(k)} D^k,$$

使得 $a_k \geq 0$, 当 $k > j$ 时, $m(k) - 2k < m(j) - 2j$. $L - M$ 关于 $T_0(M)$ 相对有界;

(ii) L 极限点且 $T_1(L)$ 分离.

证明 设 $p_N(x) = c_N x^{n(N)} + p_{N0}(x)$, 则 $p_{N0}(x)$ 的阶数 $< n(N)$. 记

$$L_0 \equiv (-1)^N c_N D^N x^{n(N)} D^N + \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k D^k p_k(x) D^k,$$

$$L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon W, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1,$$

其中, $W = (-1)^N D^N p_{N0}(x) D^N$, 则 $L = L_1$.

(1) 对 L_0 构造 M 如定理 5.4.4, 则 L_0 为极限点, $T_1(L_0)$ 分离且 $\mathcal{D}(T_0(L_0)) = \mathcal{D}(T_0(M))$.

(2) 对任何 $f \in \mathcal{D}(T_0(M))$, 因为 $T_1(L_0)$ 分离, 对 $l \geq 1$, $x^{n(N)-l} D^{2N-l} f$ 都平方可积, 所以由引理 5.4.11, $L - M$ 关于 $T_0(M)$ 相对有界.

(3) $T_0(L_\varepsilon)$ 是分离的. 考虑 $L_\varepsilon + 1 = L_0 + 1 + \varepsilon W$, 则

$$(L_\varepsilon + 1)^2 = (L_0 + 1)^2 + \varepsilon^2 W^2 + \varepsilon ((L_0 + 1)W + W(L_0 + 1)).$$

由定理 5.4.4, $L_0 = M + (L_0 - M)$, $L_0 - M$ 关于 $T_0(M)$ 相对紧, 所以

$$\mathcal{D}(T_0(L_0 + 1)) = \mathcal{D}(T_0(L_0)) = \mathcal{D}(T_0(M)) = \mathcal{D}(T_0(M + 1)),$$

于是

$$\|(M + 1)f\| \leq K(\|f\| + \|(L_0 + 1)f\|), \quad f \in \mathcal{D}(T_0(L_0 + 1)).$$

因为 $\text{ran} T_0(L_0 + 1)$ 闭, $(T_0(L_0 + 1))^{-1}$ 是有界线性算子, 故

$$\|(M + 1)f\| \leq K_1 \|(L_0 + 1)f\|;$$

即有某个 $\delta > 0$ 使得

$$(L_0 + 1)^2 > \delta(M + 1)^2.$$

(i) 下面先证明对任何 $0 \leq r \leq 2N$, 均有正数 η 使得

$$D^{2N} x^{2n(N)} D^{2N} + 1 > \eta(-1)^{2N-r} D^{2N-r} x^{2n(N)-2r} D^{2N-r}.$$

如果对一切 $t, 0 \leq t < r$, 都有 $2n(N) \neq 2t + 1$, 则由引理 5.4.7, 便得不等式.

如果存在某个 $t_0, 0 \leq t_0 < r$, 使得 $2n(N) = 2t_0 + 1$, 则由引理 5.4.7 可得

$$D^{2N} x^{2n(N)} D^{2N} > \eta_1(-1)^{2N-t_0} D^{2N-t_0} x^{2n(N)-2t_0} D^{2N-t_0}.$$

记 $r = t_0 + r_0, r_0 \geq 1$, 于是对 $f \in C_0^\infty(1, \infty)$, 用 Goldberg 不等式将得

$$\begin{aligned} & ((-1)^{2N-r} D^{2N-r} x^{2n(N)-2r} D^{2N-r} f, f) \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^{2r_0-1}} |D^{2N-r} f|^2 dx \\ &\leq \|D^{2N-t_0-r_0} f\|^2 \leq K \|f\|^2 + \|D^{2N-t_0} f\|^2 \\ &\leq \|\sqrt{x} D^{2N-t_0} f\|^2 + K \|f\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\eta_1} \|x^{n(N)} D^{2N} f\|^2 + K \|f\|^2. \end{aligned}$$

因此不等式也成立.

(ii) $(L_0 + 1)^2 + \varepsilon^2 W^2 \gg \varepsilon((L_0 + 1)W + W(L_0 + 1))$: 考虑右端的某一项, 其形状为

$$c((-1)^j D^j x^l D^j) ((-1)^N D^N x^p D^N) \quad \text{或} \quad c((-1)^N D^N x^p D^N) ((-1)^j D^j x^l D^j),$$

其中, $l \leq n(j), p \leq n(N)$. 只看前一种情形, 把它展开来, 得

$$\sum_{r=0}^{N+2j} b_r x^{l+p-r} D^{2N+2j-r}.$$

当 $0 \leq r \leq 2j$ 时, 对任何 $f \in C_0^\infty(1, \infty)$, 由 Leibnitz 法则与 Schwarz 不等式, 有

$$|(x^{l+p-r} D^{2N+2j-r} f, f)| = |(D^{2N} f, D^{2j-r} x^{l+p-r} f)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{u=0}^{2j-r} d_u |(D^{2N} f, x^{l+p-r-u} D^{2j-r-u} f)| \\
&\leq \sum_{u=0}^{2j-r} d_u \|x^p D^{2N} f\| \|x^{l-r-u} D^{2j-r-u} f\|.
\end{aligned}$$

可是

$$D^{2N} x^{2n(N)} D^{2N} \gg D^{2N} x^{2p} D^{2N},$$

$$D^{2j} x^{2n(j)} D^{2j} + 1 \geq D^{2j} x^{2l} D^{2j} + 1 > \eta(-1)^{2j-r-u} D^{2j-r-u} x^{2l-2r-u} D^{2j-r-u},$$

再注意到 M 的构造, 存在 $k \geq j$, 使得 $n(k) - 2k \geq n(j) - 2j$, 而 $(-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 M 的一项, 所以有正数 η_1 , 使得

$$D^{2k} x^{2n(k)} D^{2k} + 1 > \eta_1 \left(D^{2j} x^{2n(k)-2(2k-2j)} D^{2j} + 1 \right) \geq \eta_1 \left(D^{2j} x^{2n(j)} D^{2j} + 1 \right),$$

最后便可得

$$(M+1)^2 > \varepsilon_1 \left(D^{2N} x^{2n(N)} D^{2N} + D^{2k} x^{2n(k)} D^{2k} + 1 \right) \gg x^{l+p-r} D^{2N+2j-r}.$$

当 $2j+1 \leq r \leq 2j+N$ 时, 记 $r = 2j + r_0, 1 \leq r_0 \leq N$, 对 $f \in C_0^\infty(1, \infty)$, 有

$$\begin{aligned}
|(x^{l+p-r} D^{2N+2j-r} f, f)| &= |(x^{l+p-2j-r_0} D^{2N-r_0} f, f)| \\
&\leq \|x^{p-r_0} D^{2N-r_0} f\| \|x^{l-2j} f\|.
\end{aligned}$$

同样地, 由

$$\begin{aligned}
D^{2N} x^{2n(N)} D^{2N} + 1 &> \eta(-1)^{2N-r_0} D^{2N-r_0} x^{2n(N)-2r_0} D^{2N-r_0} \\
&\gg (-1)^{2N-r_0} D^{2N-r_0} x^{2p-2r_0} D^{2N-r_0}, \\
D^{2k} x^{2n(k)} D^{2k} + 1 &> \eta x^{2l-4j}
\end{aligned}$$

也可得

$$(M+1)^2 > \varepsilon_1 \left(D^{2N} x^{2n(N)} D^{2N} + D^{2k} x^{2n(k)} D^{2k} + 1 \right) \gg x^{l+p-r} D^{2N+2j-r}.$$

所以最后总有

$$(L_0 + 1)^2 + \varepsilon^2 W^2 \gg \varepsilon ((L_0 + 1)W + W(L_0 + 1)).$$

(iii) 仿造定理 5.4.2 的证法, 便可得 $T_0(L_\varepsilon)$ 是分离的.

(4) 因为 $T_0(L_\varepsilon)$ 分离, 所以 $\mathcal{D}(T_0(L_\varepsilon + 1)) = \mathcal{D}(T_0(L_0 + 1))$ 而且

$$\|T_0(L_\varepsilon + 1)f\| \leq K_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} (\|f\| + \|T_0(L_{\varepsilon_1} + 1)f\|), \quad f \in \mathcal{D}(T_0(L_0 + 1)).$$

由于对任给的 $\tau > 0$, 当 ε_1 与 ε_2 充分靠近时, 具体考虑 $T_0(L_{\varepsilon_2} + 1)f$ 与 $T_0(L_{\varepsilon_1} + 1)f$ 的表达式可得

$$\|T_0(L_{\varepsilon_2} + 1)f - T_0(L_{\varepsilon_1} + 1)f\| \leq \tau(\|f\| + \|T_0(L_{\varepsilon_1} + 1)f\|), \quad f \in \mathcal{D}(T_0(L_0 + 1)).$$

而 $T_0(L_\varepsilon + 1)$ 都有闭值域, 这样利用文献 [14] 的定理 V.3.6^①, 算子的指标在微小扰动下不变, 故得

$$\text{Index} T_0(L_\varepsilon + 1) = \text{Index} T_0(L_0 + 1), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1,$$

即

$$\dim L^2[1, \infty) / \text{ran} T_0(L_\varepsilon + 1) = \dim L^2[1, \infty) / \text{ran} T_0(L_0 + 1),$$

$$\text{nullity} T_1(L_\varepsilon + 1) = \text{nullity} T_1(L_0 + 1).$$

这样由 L_0 为极限点便可得

$$d(L + 1) = \text{nullity} T_1(L + 1) = \text{nullity} T_1(L_0 + 1) = d(L_0 + 1) = N.$$

于是 L 是极限点的. 由 $\mathcal{D}(T_0(L + 1)) = \mathcal{D}(T_0(L_0 + 1))$ 知 $T_0(L)$ 分离, 利用 L 是极限点与定理 1.2.6 便可得 $T_1(L)$ 分离. 定理证毕.

最后, 通过一个反例来说明定理 5.4.4, 定理 5.4.5 中的条件 (2) 是不可少的. 先证明一条引理.

引理 5.4.20 设 $L = \sum_{k=0}^N (-1)^k D^k p_k(x) D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上正则的微分算式, $p_k(x)$

都是非负的 C^∞ 函数, 如果 L 属于极限点型, 则对任何 $f \in \mathcal{D}(T_1(L))$, $p_0^{\frac{1}{2}} f$ 都平方可积.

证明 由于 L 是极限点的, 所以最大算子与最小算子的定义域仅差紧支集的 C^∞ 函数, 因此只需对 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$ 证明结论即可.

当 $f \in \mathcal{D}(T_0(L))$ 时, 存在 $C_0^\infty(1, \infty)$ 中的序列 $\{f_n\}$, 使得在空间 $L^2[1, \infty)$ 中 $\{f_n\}$ 趋于 f , 而 $\{Lf_n\}$ 趋于 Lf . 由

$$\|Lf_n\| \|f_n\| \geq |(Lf_n, f_n)| = \sum_{k=0}^N \int_1^\infty p_k |D^k f_n|^2 dx \geq \int_1^\infty p_0 |f_n|^2 dx$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Lf_n\| \|f_n\| = \|Lf\| \|f\|$$

① 这一定理涉及的概念颇多, 故从略.

便知, 存在常数 K , 使得对任意 $A > 1$ 和自然数 n , 均有

$$\int_1^A p_0 |f_n|^2 dx \leq K,$$

由 Riesz 定理, 存在 $\{f_n\}$ 的子序列 $\{f_{n_k}\}$ 在 $[1, A]$ 上几乎处处收敛到 f , 所以在 $[1, A]$ 上,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_0(x) |f_{n_k}(x)|^2 = p_0(x) |f(x)|^2, \quad \text{p.p.}$$

于是利用 Fatou 引理可得

$$\int_1^A p_0 |f|^2 dx \leq K.$$

因为 A 是任意的, 故 $p_0^{\frac{1}{2}} f \in L^2[1, \infty)$.

定理 5.4.6 存在 $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$, 使得微分算式

$$L \equiv -D^3 x^{\alpha+6} D^3 + \beta x^\alpha$$

在 $[1, \infty)$ 上不属于极限点型.

证明 只要在 $\mathcal{D}(T_1(L))$ 中找一个函数 f 使得 $x^{\frac{\alpha}{2}} f$ 不平方可积即可. 考虑方程 $Ly = 0$ 的幂函数解, 显然 $Lx^\lambda = 0$ 的充分必要条件是 λ 满足代数方程

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+\alpha+3)(\lambda+\alpha+2)(\lambda+\alpha+1) = \beta,$$

这里 λ 是一个复数, 取 $\lambda = -1 + ib$, 令

$$\theta_1(b) = \arg \lambda, \quad \theta_2(b) = \arg(\lambda-1), \quad \theta_3(b) = \arg(\lambda-2),$$

$$\theta_4(b, \alpha) = \arg(\lambda + \alpha + 3), \quad \theta_5(b, \alpha) = \arg(\lambda + \alpha + 2), \quad \theta_6(b, \alpha) = \arg(\lambda + \alpha + 1).$$

如果能取到正数 b 和 $\alpha > 1$ 使得 $\sum_{j=1}^6 \theta_j = 2\pi$, 则 x^{-1+ib} 属于 $\mathcal{D}(T_1(L))$, 但由于 $\alpha-2 > -1$, 故 $x^{\frac{\alpha}{2}} x^{-1+ib}$ 不平方可积, 因此有正数 α, β 使微分算式 $L \equiv -D^3 x^{\alpha+6} D + \beta x^\alpha$ 为非极限点型.

现在来证明存在上述的正数 b 和 $\alpha > 1$. 由图 5.4 可知对固定的 α ,

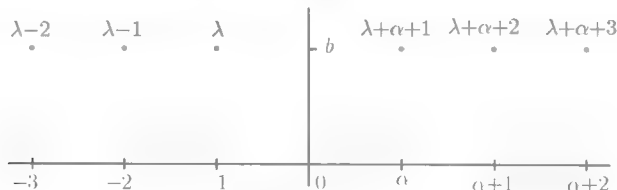


图 5.4

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \theta_1(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \theta_2(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \theta_3(b) = \frac{\pi}{2} + 0,$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \theta_4(b, \alpha) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \theta_5(b, \alpha) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \theta_6(b, \alpha) = \frac{\pi}{2} - 0.$$

所以可以取到正数 b_0 , 使得

$$\theta_1(b_0) + \theta_2(b_0) + \theta_3(b_0) < 2\pi,$$

$$\theta_1(b_0) + \theta_2(b_0) + \theta_3(b_0) + \theta_4(b, 1) + \theta_5(b, 1) + \theta_6(b, 1) > 2\pi.$$

但是

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \theta_4(b_0, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \theta_5(b_0, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \theta_6(b_0, \alpha) = +0,$$

当 α 充分大时, 便得

$$\theta_1(b_0) + \theta_2(b_0) + \theta_3(b_0) + \theta_4(b_0, \alpha) + \theta_5(b_0, \alpha) + \theta_6(b_0, \alpha) < 2\pi,$$

这样由于 $\theta_4(b_0, \alpha) + \theta_5(b_0, \alpha) + \theta_6(b_0, \alpha)$ 是 α 的连续函数, 故必存在 $\alpha_0 > 1$, 使得

$$\theta_1(b_0) + \theta_2(b_0) + \theta_3(b_0) + \theta_4(b_0, \alpha_0) + \theta_5(b_0, \alpha_0) + \theta_6(b_0, \alpha_0) = 2\pi.$$

定理证毕.

在 Kauffman 的文章中也讨论了条件 (2) 不成立时的情形, 这时如果再附加上别的条件仍然可保证微分算式的极限点性质. 他证明了下述定理: “设 $L = \sum_{k=0}^N (-1)^k D^k p_k(x) D^k$ 是 $[1, \infty)$ 上的正则的微分算式, 其中, 不恒为零的 $p_k(x)$ 都是首项系数大于零的实幂幂函数的有限线性组合

$$p_k(x) = c_k x^{n(k)} + \text{低阶项}.$$

记

$$r = \max\{n(k) - 2k\}, \quad Q = \{k | n(k) - 2k = r\},$$

$$R \equiv \sum_{k \in Q} (-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k = \sum_{k \in Q} (-1)^k c_k D^k x^{r+2k} D^k.$$

若 $T_1(R)$ 分离, 则 L 属于极限点型且 $T_1(L)$ 分离.”由此可以证明一切这类“多项式系数”的四阶微分算式都是极限点型的, 而且其最大算子还是分离的. 这是一个很漂亮的结果, 比之 A. Devinatz, P. W. Walker 和 A. D. Wood 利用渐近方法得到的某些结果要更好些. 有兴趣的读者可以进一步去阅读 Kauffman 文章 [16] 的第二部分.

附录 对称算子的自伴延拓的Calkin描述

并非所有对称算子都能延拓成为自伴算子.

例 1 设 $H = L^2[0, \infty)$, \tilde{T} 是由 $i\frac{d}{dx}$ 生成的微分算子

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\tilde{T}) &= C_0^\infty(0, \infty), \\ \tilde{T}f &= if', \quad \forall f \in \mathcal{D}(\tilde{T}).\end{aligned}$$

(1) \tilde{T} 对称:

$$(\tilde{T}f, g) = \int_0^\infty if' \bar{g} dx = \int_0^\infty f(\overline{ig'}) dx = (f, \tilde{T}g), \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\tilde{T}).$$

(2) 共轭算子 \tilde{T}^* :

设 $h \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*)$, 对任何 $\beta > \alpha > 0$, 对任何 ε , $\min\left\{\alpha, \frac{\beta - \alpha}{2}\right\} > \varepsilon > 0$, 令 $f_\varepsilon^{\alpha, \beta} = \rho_\varepsilon(x - \beta) - \rho_\varepsilon(x - \alpha)$, 这里 $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\rho(x) \geq 0$, $\rho(x) = \rho(-x)$, $\text{supp } \rho \subset [-1, 1]$, $\int_{-\infty}^\infty \rho(x) dx = 1$, 而 $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, 则 $f_\varepsilon^{\alpha, \beta} \in C_0^\infty(0, 1)$, 取

$$g_\varepsilon^{\alpha, \beta}(x) = \int_0^x f_\varepsilon^{\alpha, \beta}(t) dt,$$

则 $g_\varepsilon^{\alpha, \beta} \in \mathcal{D}(\tilde{T})$ 且

$$-1 \leq g_\varepsilon^{\alpha, \beta}(x) \leq 0, \quad g_\varepsilon^{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha - \varepsilon, \\ -1, & \alpha + \varepsilon \leq x \leq \beta - \varepsilon, \\ 0, & x > \beta + \varepsilon. \end{cases}$$

由

$$(\tilde{T}g_\varepsilon^{\alpha, \beta}, h) = (g_\varepsilon^{\alpha, \beta}, \tilde{T}^*h) = \int_0^\infty g_\varepsilon^{\alpha, \beta}(x) \overline{(\tilde{T}^*h)(x)} dx,$$

$$|g_\varepsilon^{\alpha, \beta}(x) \overline{(\tilde{T}^*h)(x)}| \leq |(\tilde{T}^*h)(x)|,$$

$\tilde{T}^*h \in L^2[0, \infty)$, 所以 $\tilde{T}^*h \in L[0, \alpha + \beta]$. 而 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g_\varepsilon^{\alpha, \beta}(x) \tilde{T}^*h(x) = -\chi_{[\alpha, \beta]}(x) \tilde{T}^*h(x)$, 所以在 $[0, \alpha + \beta]$ 上用 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (g_\varepsilon^{\alpha, \beta}, \tilde{T}^*h) = - \int_\alpha^\beta \overline{(\tilde{T}^*h)(x)} dx.$$

另一方面,

$$(\tilde{T}g_{\varepsilon}^{\alpha,\beta}, h) = i \int_0^{\infty} f_{\varepsilon}^{\alpha,\beta}(x) \overline{h(x)} dx = i \left(\int_0^{\infty} \rho_{\varepsilon}(x-\beta) \overline{h(x)} dx - \int_0^{\infty} \rho_{\varepsilon}(x-\alpha) \overline{h(x)} dx \right),$$

当 $\varepsilon \rightarrow +0$ 时, $\int_0^{\infty} \rho_{\varepsilon}(x-t) \overline{h(x)} dx = \rho_{\varepsilon} * \bar{h}(t)$ 平均收敛到 \bar{h} , 所以选取一个趋于 0 的数列 $\{\varepsilon_n\}$ 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\varepsilon} * \bar{h}(t) = \bar{h}(t) \text{ 几乎处处成立.}$$

改变 \bar{h} 在一个零测度集上的值, 可以认为此等式点点成立. 那么

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\tilde{T}g_{\varepsilon}^{\alpha,\beta}, h) = i(\overline{h(\beta)} - \overline{h(\alpha)}),$$

因此

$$\begin{aligned} - \int_{\alpha}^{\beta} \overline{(\tilde{T}^*h)(x)} dx &= i(\overline{h(\beta)} - \overline{h(\alpha)}), \\ \int_{\alpha}^{\beta} (\tilde{T}^*h)(x) dx &= i(h(\alpha) - h(\beta)), \end{aligned}$$

这表示 $h \in AC_{loc}[0, \infty)$, 而

$$ih'(x) = \tilde{T}^*h(x).$$

反过来, $\forall g \in AC_{loc}[0, \infty)$, $g' \in L^2[0, \infty)$, 当 $f \in \mathcal{D}(\tilde{T})$ 时便有

$$(\tilde{T}f, g) = \int_0^{\infty} if'(x) \overline{g(x)} dx = - \int_0^{\infty} if(x) \overline{g'(x)} dx = \int_0^{\infty} f(x) \overline{ig'(x)} dx,$$

故 $g \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*)$ 且 $T^*g = ig'$. 这样便得

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\tilde{T}^*) &= \{h \in L^2[0, \infty) | h \in AC_{loc}[0, \infty), h' \in L^2[0, \infty)\}, \\ \tilde{T}^*f &= if', \quad \forall f \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*). \end{aligned}$$

(3) \tilde{T} 没有自伴延拓:

由 (2) 知 \tilde{T} 不自伴. 如果 T 是 \tilde{T} 的自伴延拓, 则

$$\tilde{T} \subset T = T^*.$$

而

$$T = T^* \subset \tilde{T}^*,$$

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(\tilde{T}^*),$$

$\forall f, g \in \mathcal{D}(T)$, 应有

$$(Tf, g) = (f, Tg),$$

即

$$\int_0^\infty i f'(x) \overline{g(x)} dx = \int_0^\infty f(x) \overline{i g'(x)} dx.$$

而

$$(Tf, g) = i f'(x) \overline{g(x)}|_0^\infty + \int_0^\infty f(x) \overline{i g'(x)} dx,$$

所以

$$i f \overline{g}|_0^\infty = 0,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} i f(x) \overline{g(x)} = i f(0) \overline{g(0)}.$$

因为 $f, g \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*)$, 所以 $f, f', g, g' \in L^2[0, \infty)$, 由

$$(|f(x)|^2)' = (f(x) \overline{f(x)})' = f'(x) \overline{f(x)} + f(x) \overline{f'(x)},$$

知 $(|f(x)|^2)' \in [0, \infty)$, 于是由

$$|f(x)|^2 - |f(0)|^2 = \int_0^x (|f|^2)' dt,$$

知 $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)|^2 = \alpha$, 但 $f \in L^2[0, \infty)$, 故 $\alpha = 0$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

这样, $\forall f \in \mathcal{D}(T)$, 便应有 $f(0) = 0$!

那么, 对任意 $f \in \mathcal{D}(T), g \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*)$ 便有

$$(Tf, g) = \int_0^\infty i f'(x) \overline{g(x)} dx = i f(x) \overline{g(x)}|_0^\infty + \int_0^\infty f(x) \overline{i g'(x)} dx - \int_0^\infty f(x) \overline{i g'(x)} dx.$$

这表示 $g \in \mathcal{D}(T^*)$ 且 $T^*g = ig'$. 因而 $\mathcal{D}(\tilde{T}^*) \subset \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$, 这是不可能的. 所以 \tilde{T} 没有自伴延拓.

什么样的对称算子有自伴延拓? 自伴延拓怎样找呢?

绝大多数泛函分析的教科书或专著在讨论对称算子自伴延拓时, 都采用 1930 年 J. von Neumann 的描述, 即证明具有相等亏指数的对称算子 A 有自伴延拓. 且 A 的自伴延拓与它的亏子空间 K_+, K_- 间的酉算子可以建立一个一一对应关系. 这样当 $\dim K_+ = \dim K_- < \infty$ 时, A 的自伴延拓便可以与 $K_+ \rightarrow K_-$ 的酉变换 (变换矩阵为酉矩阵) 建立起一个一一对应. 这种描述用来讨论微分方程和数学物理中常碰到的对称微分算子的自伴延拓并不方便, 因为这个描述并没有给出自伴延拓定义域中的元素在边界上的特征, 而处理微分方程问题时, 很自然地希望自伴延拓能与边

界条件联系起来. 1939 年 Calkin 的文章 (*Abstract symmetric boundary conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. 45(1939), 364-442.) 便是从边界条件角度去刻画自伴延拓的定义域的.

引理 1 设 T 为闭对称算子, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, 则 $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$, $\operatorname{ran}(\lambda I - T)$ 为闭子空间且

$$H = \operatorname{ran}(\lambda I - T) \oplus \ker(\bar{\lambda} I - T^*) = \operatorname{ran}(\bar{\lambda} I - T) \oplus \ker(\lambda I - T^*).$$

证明 因为

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - T)x\|^2 &= (\lambda x - Tx, \lambda x - Tx) \\ &= |\lambda|^2 \|x\|^2 - 2\operatorname{Re} \lambda(x, Tx) + \|Tx\|^2 \\ &\geq |\operatorname{Im} \lambda|^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

所以 $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$, $\operatorname{ran}(\lambda I - T)$ 为闭子空间, 从而引理成立.

定义 1 设 T 对称, 称 $K_+ = \ker(T^* - iI)$, $K_- = \ker(T^* + iI)$ 为 T 的亏子空间, 称 $d_+ = \dim K_+$, $d_- = \dim K_-$ 为 T 的亏指数.

引理 2 (John von Neumann 分解) 设 T 闭对称, 则 $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T) \oplus K_+ \oplus K_-$.

证明 (1) 分解的存在性.

对任意 $x \in \mathcal{D}(T^*)$, $(T^* - iI)x$ 有意义, 因为由引理 1, $H = \operatorname{ran}(T - iI) \oplus \ker(T^* + iI)$, 所以存在 $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, $x_2 \in K_-$, 使得

$$(T^* - iI)x = (T - iI)x_0 + x_2.$$

由于 $x_0 \in \mathcal{D}(T^*)$, 而 $T^*x_2 = -ix_2$, 所以

$$x_2 = -\frac{1}{i}T^*x_2 = iT^*x_2, \quad Tx_0 = T^*x_0.$$

前式可改写为

$$T^* \left(x - x_0 - \frac{i}{2}x_2 \right) = ix - ix_0 + \frac{x_2}{2} = i \left(x - x_0 - \frac{i}{2}x_2 \right),$$

这表示 $x - x_0 - \frac{i}{2}x_2 \in K_+$, 于是

$$x = x_0 + \left(x - x_0 - \frac{i}{2}x_2 \right) + \frac{i}{2}x_2.$$

(2) 分解的唯一性.

若 $0 = x_0 + x_1 + x_2$, $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, $x_1 \in K_+$, $x_2 \in K_-$, 则

$$\begin{aligned}
 0 &= (T^* - iI)(x_0 + x_1 + x_2) \\
 &= (T - iI)x_0 + (T^* - iI)x_2 \\
 &= (T - iI)x_0 - 2ix_2,
 \end{aligned}$$

而

$$H = \text{ran } (T - iI) \oplus \ker(T^* + iI),$$

所以 $x_2 = 0$. 同理, 两边作用 $T^* + iI$ 可得 $x_1 = 0$, 最后 $x_0 = 0$, 即分解唯一.

推论 1 设 T 闭对称算子. S 为 T 的延拓, 满足 $T \subset S \subset T^*$, 则存在 $K_+ \oplus K_-$ 的子空间 K , 使得 $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T) \oplus K$.

证明 令

$$K = \{z \in K_+ \oplus K_- \mid \exists x \in \mathcal{D}(S) \text{ 及 } y \in \mathcal{D}(T), \text{ 使得 } x = y + z\},$$

容易验证 K 是 $K_+ \oplus K_-$ 的线性子空间, 从而 $\{0\} \subset K \cap \mathcal{D}(T) \subset (K_+ \oplus K_-) \cap \mathcal{D}(T) = \{0\}$, 所以 $\mathcal{D}(T) \oplus K \subset \mathcal{D}(S)$. 而对任意 $x \in \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T^*)$, 由引理 2, 有 $x = x_0 + x_1 + x_2$, 其中, $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, $x_1 \in K_+$, $x_2 \in K_-$, 于是 $x_1 + x_2 \in K$, 即 $\mathcal{D}(T) \oplus K \supset \mathcal{D}(S)$, 所以

$$\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T) \oplus K.$$

定义 2 设 T 对称, 令

$$\langle x, y \rangle = (T^*x, y) - (x, T^*y), \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T^*),$$

则 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $\mathcal{D}(T^*) \times \mathcal{D}(T^*)$ 上双线性函数 (对第一变元线性, 第二变元共轭线性). 此外还有 $\langle x, y \rangle = -\overline{\langle y, x \rangle}$.

例 2 设 $H = L^2[0, 1]$,

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in H \mid f \in AC[0, 1], f' \in H, f(0) = f(1) = 0\},$$

$$Tf = if', \quad \forall f \in \mathcal{D}(T),$$

则 T 是闭对称算子, 类似例 1, 可算得

$$\mathcal{D}(T^*) = \{f \in H \mid f \in AC[0, 1], f' \in H\}.$$

由于 $e^{\pm ix} \in \mathcal{D}(T^*) \setminus \mathcal{D}(T)$, $T \neq T^*$. 下面求 T 的自伴延拓.

T 不自伴, 因为其边界条件太严, 而 T^* 中条件又太宽! 对任意 $f, g \in \mathcal{D}(T^*)$, 有

$$\langle f, g \rangle = (T^*f, g) - (f, T^*g)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 i f' \bar{g} dx - \int_0^1 f i \bar{g}' dx \\
&= i f \bar{g} \Big|_0^1 \\
&= i(f(1)\overline{g(1)} - f(0)\overline{g(0)}).
\end{aligned}$$

由此式可找出 T 的自伴延拓的适当边界条件. 设 S 为 T 的自伴延拓, 则 $T \subset S = S^* \subset T^*$, 对任意 $f, g \in \mathcal{D}(S)$, 由 S 自伴, $(Sf, g) = (f, Sg)$, 所以

$$\langle f, g \rangle = 0,$$

取 $g = f \in \mathcal{D}(S) \setminus \mathcal{D}(T)$, 则 $|f(1)|^2 = |f(0)|^2$ (这时 $f(0) \neq 0$). 于是存在 $\alpha (|\alpha| = 1)$, 使得 $f(1) = \alpha f(0)$.

下证任意的 $g \in \mathcal{D}(S)$ 都满足这一边界条件.

由 S 自伴,

$$\langle f, g \rangle = i(f(1)\overline{g(1)} - f(0)\overline{g(0)}) = 0,$$

即 $i(\alpha \overline{g(1)} - \overline{g(0)}) = 0$, 所以 $\overline{g(1)} = \overline{\alpha g(0)}$, 即 g 满足边界条件 $g(1) = \alpha g(0)$. 于是

$$\mathcal{D}(S) = \{f \in \mathcal{D}(T^*) | f(1) = \alpha f(0)\}, \quad \text{对某个 } \alpha (|\alpha| = 1).$$

因为 $S \subset T^*$, 所以 $Sf = if' (\forall f \in \mathcal{D}(S))$. 若令 $T_\alpha = i \frac{d}{dx}$

$$\mathcal{D}(T_\alpha) = \{f \in \mathcal{D}(T^*) | f(1) = \alpha f(0), |\alpha| = 1\},$$

则 $S = T_\alpha$. 反之, 对任意 $\alpha, |\alpha| = 1$, T_α 也是 T 的一个自伴延拓 (可以证明 $\{T_\alpha | |\alpha| = 1\}$ 为全部自伴延拓).

引理 3 设 T 对称, $x \in \mathcal{D}(T^*)$, 则以下 3 条等价:

- (1) $x \in \mathcal{D}(\overline{T})$;
- (2) $\langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{D}(T^*)$;
- (3) $\langle x, y \rangle = 0, \forall y \in K_+ \oplus K_-$.

若 $K_+ \oplus K_-$ 为有限维空间, $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为其基, 则 (1)~(3) 与

- (4) $\langle x, x_j \rangle = 0 (j = 1, \dots, n)$

等价.

证明 (1) \Rightarrow (2) 对任意 $y \in \mathcal{D}(T^*)$, 有

$$\langle x, y \rangle = (T^*x, y) - (x, T^*y) = (\overline{T}x, y) - (x, \overline{T}^*y) = 0.$$

(2) \Rightarrow (3) 显然.

(3) \Rightarrow (2) 对任意 $y \in \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(\bar{T}^*)$, 有 $y = y_0 + \tilde{y}$, 其中, $y_0 \in \mathcal{D}(\bar{T})$, $\tilde{y} \in K_+ \oplus K_-$,

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle x, y_0 + \tilde{y} \rangle = \langle x, y_0 \rangle + \langle x, \tilde{y} \rangle = \langle x, y_0 \rangle = (T^*x, y_0) - (x, T^*y_0) \\ &= (\bar{T}^*x, y_0) - (x, \bar{T}y_0) = 0,\end{aligned}$$

所以 (2) 成立.

(2) \Rightarrow (1) 若 $x \in \mathcal{D}(T^*)$, $\forall y \in \mathcal{D}(T^*)$ 有 $\langle x, y \rangle = 0$, 则 $(T^*x, y) = (x, T^*y)$, 所以 $x \in \mathcal{D}(T^{**}) = \mathcal{D}(\bar{T})$.

这条引理给出了对称算子最小闭延拓的刻画

$$\mathcal{D}(\bar{T}) = \{x \in \mathcal{D}(T^*) | \langle x, y \rangle = 0, y \in \mathcal{D}(T^*)\} - \{x \in \mathcal{D}(T^*) | \langle x, y \rangle = 0, y \in K_+ \oplus K_-\}.$$

定义 3 设 K 为 $K_+ \oplus K_-$ 的子空间, 其共轭 K^* 定义为

$$K^* = \{x \in K_+ \oplus K_- | \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in K\},$$

若 $K \subset K^*$, 则称 K 对称 (即对任意 $x, y \in K$, $\langle x, y \rangle = 0$). 若 $K = K^*$, 则称 K 自伴.

引理 4 设 T 闭对称, T_1 是 T 的延拓满足 $T \subset T_1 \subset T^*$, 则存在 $K \subset K_+ \oplus K_-$, 使得 $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T) \oplus K$ 且 T_1 对称 (自伴) 当且仅当 K 对称 (自伴).

证明 由推论 1, 存在 $K \subset K_+ \oplus K_-$, 使得 $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T) \oplus K$.

(1) T_1^* 的定义域的刻画:

由于 $T \subset T_1 \subset \bar{T}_1 \subset T^*$, 所以 $\bar{T} = T^{**} \subset \bar{T}_1^* \subset T^*$, 从而

$$\begin{aligned}x \in \mathcal{D}(T_1^*) &\Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(T^*) \text{ 且 } (T_1y, x) = (y, T_1^*x) (\forall y \in \mathcal{D}(T_1)) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(T^*) \text{ 且 } (T^*y, x) = (y, T^*x) (\forall y \in \mathcal{D}(T_1)),\end{aligned}$$

故

$$x \in \mathcal{D}(T_1^*) \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(T^*) \text{ 且 } \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{D}(T_1),$$

即

$$\mathcal{D}(T_1^*) = \{x \in \mathcal{D}(T^*) | \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{D}(T_1)\}.$$

(2) T_1 对称当且仅当 K 对称.

\Rightarrow 对任意 $u, v \in K$, 有 $x_0, y_0 \in \mathcal{D}(T)$, 使 $x = x_0 + u, y = y_0 + v \in \mathcal{D}(T_1)$. 由 T_1 的对称性,

$$\langle x, y \rangle = (T^*x, y) - (x, T^*y) = (T_1x, y) - (x, T_1y) = 0,$$

由引理 3,

$$0 = \langle x, y \rangle = \langle x_0 + u, y_0 + v \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle + \langle x_0, v \rangle + \langle u, y_0 \rangle + \langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle,$$

所以 K 对称.

\Leftarrow 设 K 对称, 对任意 $x, y \in \mathcal{D}(T_1)$, 设 $x = x_0 + u, y = y_0 + v$, 其中 $x_0, y_0 \in \mathcal{D}(T), u, v \in K$, 则

$$\begin{aligned} (T_1 x, y) - (x, T_1 y) &= (T^* x, y) - (x, T^* y) = \langle x, y \rangle. \\ &= \langle x_0, y_0 \rangle + \langle x_0, v \rangle + \langle u, y_0 \rangle + \langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle = 0, \end{aligned}$$

于是 T 对称.

(3) T_1 自伴当且仅当 K 自伴.

由推论 1, 设 $\mathcal{D}(T_1^*) = \mathcal{D}(T) \oplus L$, 由于

$$\mathcal{D}(T_1^*) = \{x \in \mathcal{D}(T^*) | \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{D}(T_1)\} = \{x \in \mathcal{D}(T^*) | \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in K\},$$

所以

$$\begin{aligned} x \in L &\Leftrightarrow \text{存在 } z = z_0 + x \in \mathcal{D}(T_1^*), \text{ 其中, } z_0 \in \mathcal{D}(T) \\ &\Leftrightarrow \text{存在 } z_0 \in \mathcal{D}(T), \text{ 使得 } \langle z_0 + x, y \rangle = 0 (\forall y \in K) \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 (\forall y \in K) \\ &\Leftrightarrow x \in K^*, \end{aligned}$$

于是 $L = K^*, \mathcal{D}(T_1^*) = \mathcal{D}(T) \oplus K^*$. 这样,

$$\begin{aligned} T_1 \text{ 自伴} &\Leftrightarrow \mathcal{D}(T_1^*) = \mathcal{D}(T_1) \\ &\Leftrightarrow K^* = K \\ &\Leftrightarrow K \text{ 自伴}. \end{aligned}$$

引理 4 说明, 对称算子 T 有没有自伴延拓和如何找出自伴延拓的问题可以归结为 $K_+ \oplus K_-$ 中有没有自伴子空间和如何找出自伴子空间问题. 当 $\dim K_+ \oplus K_- < \infty$ 时, 这个问题可以用有限维空间方法去解决. 对于由对称微分算式定义的对称微分算子来说, 其亏子空间是由微分方程线性无关的平方可积解张成的. 当然是有限维的.

引理 5 设 $x, y \in K_+ \oplus K_-, x = x_+ + x_-, y = y_+ + y_-$, 则

$$\langle x, y \rangle = 2i((x_+, y_+) - (x_-, y_-)),$$

$$\langle x, x \rangle = 2i(\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2).$$

证明

$$\langle x, y \rangle = (T^* x, y) - (x, T^* y)$$

$$\begin{aligned}
&= (T^*(x_+ + x_-), y_+ + y_-) - (x_+ + x_-, T^*(y_+ + y_-)) \\
&= i(x_+ - x_-, y_+ + y_-) - (x_+ + x_-, iy_+ - iy_-) \\
&= 2i((x_+, y_+) - (x_-, y_-)),
\end{aligned}$$

从而

$$\langle x, x \rangle = 2i(\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2).$$

推论 2 若 $K \subset K_+ \oplus K_-$ 对称, $x \in K$ 可表示为 $x = x_+ + x_-$, 则

$$\|x_+\| = \|x_-\|.$$

引理 6 设对称算子 T 有有限的亏指数 (d_+, d_-) , $K \subset K_+ \oplus K_-$ 为维数为 n 的子空间, 则 $\dim K^* = d_+ + d_- - n$.

证明 设 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为 K 的一组基, 则

$$K^* = \{x \in K_+ \oplus K_- \mid \langle x, x_i \rangle = 0, i = 1, \dots, n\}.$$

定义 $x_i^* (i = 1, \dots, n)$ 如下:

$$x_i^*(x) = \langle x, x_i \rangle, \quad \forall x \in K_+ \oplus K_-.$$

则 x_i^* 是 $K_+ \oplus K_-$ 上线性泛函 $(i = 1, \dots, n)$ 且线性无关. 事实上, 若 $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^* = 0$, 有

$$0 = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^* \right) (x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle x, x_j \rangle = \left\langle x, \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} x_j \right\rangle, \quad \forall x \in K_+ \oplus K_-.$$

设

$$\sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} x_j = u_+ + u_-, u_{\pm} \in K_{\pm},$$

则

$$\langle x, u_+ + u_- \rangle = 0, \quad \forall x \in K_+ \oplus K_-.$$

从而

$$\langle u_+, u_+ + u_- \rangle = 0.$$

同样,

$$\langle u_-, u_+ + u_- \rangle = 0.$$

所以

$$2i\|u_+\|^2 = 0, \quad 2i\|u_-\|^2 = 0,$$

因此 $u_+ = u_- = 0$, 于是

$$\sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} x_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

所以 x_1^*, \dots, x_n^* 线性无关. 这时,

$$K^* = \{x \in K_+ + K_- | x_i^*(x) = 0, i = 1, \dots, n\}.$$

下证 $\dim K^* = d_+ + d_- - n$ (参见 Halmos “有限维向量空间”).

事实上, 设 $d = d_+ + d_-$, 将 $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ 扩充为 $(K_+ \oplus K_-)^\#(K_+ \oplus K_-)$ 的线性泛函空间, 即代数对偶空间) 的基 $\{x_1^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*, \dots, x_d^*\}$. 设 $\{y_1, \dots, y_d\}$ 是相应 $K_+ \oplus K_-$ 中的对偶基, 即 $x_j^*(y_k) = \delta_{jk}$ ($j, k = 1, \dots, d$), 所以 $y_{n+1}, \dots, y_d \in K^*$. 从而

$$\dim K^* \geq d - n = d_+ + d_- - n.$$

另一方面, 对任意 $x \in K^*$, 有 $x = \sum_{j=1}^d a_j y_j$, 于是

$$x_k^*(x) = \sum_{j=1}^d a_j x_k^*(y_j) = a_k, \quad k = 1, \dots, d.$$

而由 K^* 定义知

$$x_k^*(x) = \langle x, x_k \rangle = 0, \quad \forall x \in K, k = 1, \dots, n,$$

所以 $a_k = 0, k = 1, \dots, n$, 于是 $x = \sum_{j=n+1}^d a_j y_j$, 即 $x \in \text{span}\{y_{n+1}, \dots, y_d\}$, 所以

$$\dim K^* = d_+ + d_- - n.$$

推论 3 设闭对称算子 T 有有限亏指数 $d = d_- = d_+$, $K \subset K_+ \oplus K_-$ 自伴, 则 $\dim K = d$.

定理 1 设 T 是亏指数有限的对称算子, 则 T 有自伴延拓的充要条件为 $d_+ = d_-$.

证明 \Leftarrow 设 $d_+ = d_- = d$, $\{x_1^+, \dots, x_d^+\}$ 与 $\{x_1^-, \dots, x_d^-\}$ 分别为 K_+ 和 K_- 的标准正交基. 令

$$x_j = x_j^+ + x_j^-, \quad j = 1, \dots, d,$$

设 $K = \text{span}\{x_1, \dots, x_d\}$.

(1) $\{x_1, \dots, x_d\}$ 线性无关.

设 $\sum_{j=1}^d \alpha_j x_j = 0$, 则

$$\sum_{j=1}^d \alpha_j x_j^+ = -\sum_{j=1}^d \alpha_j x_j^- \in K_+ \cap K_-,$$

所以

$$\sum_{j=1}^d \alpha_j x_j^\pm = 0,$$

因此 $\alpha_j = 0, j = 1, \dots, d$. 于是 $\{x_1, \dots, x_d\}$ 线性无关.

(2) K 对称.

对任意 $x, y \in K$, 则

$$x = \sum_{j=1}^d \alpha_j x_j, \quad y = \sum_{j=1}^d \beta_j x_j,$$

于是

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{j,k=1}^d \alpha_j \overline{\beta_k} \langle x_j, x_k \rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^d \alpha_j \overline{\beta_k} \langle x_j^+ + x_j^-, x_k^+ + x_k^- \rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^d \alpha_j \overline{\beta_k} 2i((x_j^+, x_k^+) - (x_j^-, x_k^-)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以 K 对称.

(3) $\dim K^* = 2d - \dim K = d$. 因为 K 对称, 所以 $K \subset K^*$, 从而 $K = K^*$, 即 K 自伴, $\mathcal{D}(T) \oplus K$ 为自伴延拓的定义域.

⇒ 设 $K \subset K_+ \oplus K_-$ 为自伴子空间. $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为 K 的一组基,

$$x_j = x_j^+ + x_j^-, \quad j = 1, \dots, n, x_j^\pm \in K_\pm,$$

则 $\{x_j^+\}_{j=1}^n$ 线性无关. 这是因为若 $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^+ = 0$, 由推论 3 知 $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 0$, 因而

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 0, \text{ 所以 } \alpha_j = 0, j = 1, \dots, n.$$

同理, $\{x_j^-\}_{j=1}^n$ 线性无关, 于是 $n \leq \min\{d_+, d_-\}$.

另一方面, 由 K 自伴, $K = K^*$. 由引理 6, $n = \dim K^* = d_+ + d_- - \dim K = d_+ + d_- - n$, 所以 $2n = d_+ + d_-$, 又因为 $n \leq d_-, n \leq d_+$, 于是 $d_+ = d_- = n$.

定理 2(von Neumann 描述) 设闭对称算子 T 的亏指数 $d_+ = d_- = d < \infty$, 则 T 的自伴延拓与 $K_+ \rightarrow K_-$ 的西算子之间有一个一一对应.

证明 (1) 设 S 是 T 的自伴延拓, 则

$$\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T) \oplus K, \quad K = K^*.$$

对任意的 $x = x_+ + x_- \in K, x_{\pm} \in K_{\pm}$, 由推论 2, 有 $\|x_+\| = \|x_-\|$. 令

$$\mathcal{D}(U) = \{x_+ \in K_+ | \exists x_- \in K_-, \text{ s.t. } x_+ + x_- \in K\}, \quad Ux_+ = x_-, \forall x_+ \in \mathcal{D}(U),$$

则 $\mathcal{D}(U)$ 是 K_+ 的子空间, U 为 $\mathcal{D}(U) \rightarrow K_-$ 线性等距算子.

下证 $\mathcal{D}(U) = K_+$. 若不然, 则有 $0 \neq u \in K_+$, 使得 $u \perp \mathcal{D}(U)$. 这时 $u \notin K$, 所以 $u \notin \mathcal{D}(S)$. 对任意的 $x \in \mathcal{D}(S)$, 设

$$x = x_0 + x_+ + x_-, \quad x_0 \in \mathcal{D}(T), x_{\pm} \in K_{\pm}, x_+ + x_- \in K,$$

所以

$$\begin{aligned} \langle x, u \rangle &= \langle x_0 + x_+ + x_-, u \rangle = \langle x_+ + x_-, u \rangle \\ &= 2i((x_+, u) - (x_-, 0)) = 2i(x_+, u) = 0, \end{aligned}$$

因而

$$(T^*x, u) - (x, T^*u),$$

即

$$(Sx, u) = (x, T^*u),$$

所以 $u \in \mathcal{D}(S^*) = \mathcal{D}(S)$, 矛盾! 于是

$$\mathcal{D}(S) = \{x_0 + x_+ + Ux_+ | x_0 \in \mathcal{D}(T), x_+ \in K_+\},$$

$$\begin{aligned} S(x_0 + x_+ + Ux_+) &= T^*(x_0 + x_+ + Ux_+) \\ &= T^*x_0 + T^*x + T^*Ux_+ \\ &= Tx_0 + ix_+ + (-iUx_+) \\ &= Tx_0 + ix_+ - iUx_+. \end{aligned}$$

(2) 设 $U: K_+ \rightarrow K_-$ 是西算子. 令

$$K = \{x_+ + Ux_+ | x_+ \in K_+\}.$$

(i) K 对称.

$$\langle x_+ + Ux_+, y_+ + Uy_+ \rangle = 2i((x_+, y_+) - (Ux_+, Uy_+)) = 0,$$

所以 K 对称.

(ii) K 自伴.

设 $z \in K^*$, $z = z_+ + z_-$, $z_{\pm} \in K_{\pm}$, 则

$$\begin{aligned} 0 &= \langle z, x_+ + Ux_+ \rangle \\ &= \langle z_+ + z_-, x_+ + Ux_+ \rangle \\ &= 2i((z_+, x_+) - (z_-, Ux_+)) = 2i((Uz_+, Ux_+) - (z_-, Ux_+)) \\ &= 2i(Uz_+ - z_-, Ux_+), \quad \forall x_+ \in K_+, \end{aligned}$$

因为 $\text{ran} U = K_-$, 所以存在 $\widetilde{x_+} \in K_+$, 使得 $U\widetilde{x_+} = Uz_+ - z_-$, 于是在上式中取 $x_+ = \widetilde{x_+}$, 则 $2i\|Uz_+ - z_-\|^2 = 0$, 所以 $Uz_+ = z_-$, 即 $z \in K$, 从而 $K = K^*$. 与 U 对应的自伴延拓为 T_1 ,

$$\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T) \oplus K = \{x_0 + x_+ + Ux_+ | x_0 \in \mathcal{D}(T), x_+ \in K_+\},$$

$$T_1(x_0 + x_+ + Ux_+) = Tx_0 + ix_+ - iUx_+.$$

为了便于讨论对称微分算子的自伴延拓, 再找出自伴延拓定义域的抽象边界条件刻画, 即 Calkin 描述.

定义 4 设 $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathcal{D}(T^*)$, $x_j = x_{j0} + z_j$, $x_{j0} \in \mathcal{D}(\overline{T})$, $z_j \in K_+ \oplus K_-$. 如果 $\{z_1, \dots, z_k\}$ 线性无关, 则称 $\{x_1, \dots, x_k\}$ 模 $\mathcal{D}(T)$ 线性无关.

定理 3 $\mathcal{D}(T^*)$ 中元素 $\{x_1, \dots, x_k\}$ 模 $\mathcal{D}(T)$ 线性无关的充要条件为存在 $\{y_1, \dots, y_k\} \subset \mathcal{D}(T^*)$, 使得 $\det(\langle x_i, y_j \rangle) \neq 0$.

证明 设

$$x_j = x_{j0} + z_j, \quad x_{j0} \in \mathcal{D}(\overline{T}), z_j \in K_+ \oplus K_-, \quad j = 1, \dots, k.$$

(1) \Rightarrow 设 $\{z_1, \dots, z_k\}$ 线性无关, 令

$$z_j^*(x) = \langle x, z_j \rangle, \quad \forall x \in K_+ \oplus K_-,$$

则 z_1^*, \dots, z_k^* 为 $(K_+ \oplus K_-)^\#$ 里的线性泛函且线性无关. 设 $d = d_+ + d_- = \dim(K_+ \oplus K_-) < \infty$. 将 $\{z_1^*, \dots, z_k^*\}$ 扩充成 $(K_+ \oplus K_-)^\#$ 的基 $\{z_1^*, \dots, z_k^*, z_{k+1}^*, \dots, z_d^*\}$, 而 $K_+ \oplus K_-$ 相应的对偶基为 $\{y_1, \dots, y_d\}$, 则

$$\langle x_i, y_j \rangle = \langle x_{i0} + z_i, y_j \rangle = \langle z_i, y_j \rangle = -\overline{\langle y_j, z_i \rangle} = -\overline{z_i^*(y_j)} = -\delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

则

$$\det(\langle x_i, y_j \rangle) = \begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^k \neq 0.$$

(2) 设存在 $\{y_1, \cdots, y_k\} \subset \mathcal{D}(T^*)$, 使得 $\det(\langle x_i, y_j \rangle) \neq 0$. 设

$$\langle x_i, y_j \rangle = \langle z_i, y_j \rangle, \quad i, j = 1, \cdots, k.$$

若 $\sum_{i=1}^k \alpha_i z_i = 0$, 则

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i z_i, y_j \right\rangle = 0, \quad j = 1, \cdots, k,$$

即

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \langle z_i, y_j \rangle = 0, \quad j = 1, \cdots, k.$$

而

$$\det(\langle z_i, y_j \rangle) = \det(\langle x_i, y_j \rangle) \neq 0,$$

所以 $\alpha_i = 0, i = 1, \cdots, k, \{z_i\}_{i=1}^k$ 线性无关, $\{x_i\}$ 模 $\mathcal{D}(T)$ 线性无关.

定义 5 设 T 为对称算子, 若 \bar{T} 自伴, 则称 T 为本性自伴的.

定理 4 对称算子为本性自伴的充要条件是 $d_+ - d_- = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ran}(T \pm iI)$ 稠.

证明 \Rightarrow 若 \bar{T} 自伴, 则 $\ker(\bar{T}^* \pm iI) = \{0\}$, 即 $d_+ = d_- = 0$.

\Leftarrow 由 J. von Neumann 分解 $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(\bar{T})$, 所以 $\bar{T}^* = T^* = \bar{T}$, 于是 T 本性自伴.

推论 4 对称算子 T 本性自伴的充要条件是 T 有唯一的自伴延拓.

证明 \Rightarrow 设 S 为 T 的自伴延拓, 则 $T \subset S = S^* \subset T^* = \bar{T}^* = \bar{T}$, 而 $\bar{T} \subset S$ (因为 S 闭) 所以 $S = \bar{T}$.

\Leftarrow 若 T 有唯一自伴延拓, 则 $d_+ = d_- = 0$, 否则 $K_+ \rightarrow K_-$ 有无穷多个酉算子, T 就有无穷多个自伴延拓.

定理 5 (Calkin 描述) 设 T 为对称算子, $d_+ = d_- = d < \infty$.

(1) 若 $d = 0$, 则 T 有唯一自伴延拓 \bar{T} ;

(2) 若 $d > 0$, 设 $\{x_1, \cdots, x_d\} \subset \mathcal{D}(T^*)$ 模 $\mathcal{D}(T)$ 线性无关且 $\langle x_i, x_j \rangle = 0, i, j = 1, \cdots, d$, 记

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D}(T^*) | \langle x, x_i \rangle = 0, i = 1, \cdots, d\},$$

则 $T^*|_{\mathcal{D}}$ 为 T 的自伴延拓. 反之, 若 T_1 是 T 的自伴延拓, 则存在 $\{z_1, \dots, z_d\} \subset \mathcal{D}(T^*)$, 它们模 $\mathcal{D}(T)$ 线性无关且 $\langle z_i, z_j \rangle = 0, i, j = 1, \dots, d$, 使得

$$\mathcal{D}(T_1) = \{x \in \mathcal{D}(T^*) | \langle x, z_j \rangle = 0, j = 1, \dots, d\}.$$

证明 (2) 设

$$x_i = x_{i0} + z_i, \quad x_{i0} \in \mathcal{D}(\overline{T}), \quad i = 1, \dots, d, \quad z_i \in K_+ \oplus K_-$$

且 z_1, \dots, z_d 线性无关, 令

$$K = \text{span}\{z_1, \dots, z_d\},$$

则 $\dim K = d$, 而且 K 对称.

事实上,

$$0 = \langle x_i, x_j \rangle = \langle x_{i0} + z_i, x_{j0} + z_j \rangle = \langle z_i, z_j \rangle, \quad i, j = 1, \dots, d,$$

而

$$\dim K^* = d_+ + d_- - \dim K = 2d - d = d,$$

所以 $K = K^*$, K 自伴. 于是 $T^*|_{\mathcal{D}(\overline{T})+K}$ 是自伴延拓.

下证 $\mathcal{D}(\overline{T}) + K = \mathcal{D}$.

$$x \in \mathcal{D}(\overline{T}) \oplus K \Leftrightarrow x = x_0 + z(x_0 \in \mathcal{D}(\overline{T}), z \in K)$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 + \sum_{i=1}^d \alpha_i z_i (x_0 \in \mathcal{D}(\overline{T}))$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(T^*), \langle x, z_i \rangle = 0, i = 1, \dots, d$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(T^*), \langle x, x_i \rangle = 0, i = 1, \dots, d$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathcal{D},$$

即 $T^*|_{\mathcal{D}} = T^*|_{\mathcal{D}(\overline{T})+K}$.

反之, 设 T_1 为 T 的自伴延拓, 则

$$\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(\overline{T}) + K, \quad K \subset K_+ \oplus K_-, \quad K = K^*.$$

因而, 由推论 3, $\dim K = d$. 设 $\{z_1, \dots, z_d\}$ 为 K 的基, 则 $\{z_1, \dots, z_d\}$ 模 $\mathcal{D}(T)$ 线性无关且

$$\langle z_i, z_j \rangle = 0, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

而

$$\begin{aligned}
 x \in \mathcal{D}(T_1) &\Leftrightarrow x = x_0 + z, x_0 \in \mathcal{D}(\bar{T}), z \in K \\
 &\Leftrightarrow x = x_0 + z, x_0 \in \mathcal{D}(\bar{T}), \langle z, z_i \rangle = 0, i = 1, \dots, d \\
 &\Leftrightarrow \langle x, z_i \rangle = 0, i = 1, \dots, d \\
 &\Leftrightarrow x \in \mathcal{D}.
 \end{aligned}$$

所以 $T_1 = T^*|_{\mathcal{D}}$.

例 3(续例 2) 设 $H = L^2[0, 1]$,

$$\mathcal{D}(T) = \{f | f \in AC[0, 1], f' \in H, f(0) = f(1) = 0\},$$

$$Tf = if', \quad \forall f \in \mathcal{D}(T),$$

则 T 闭对称,

$$\mathcal{D}(T^*) = \{f | f \in AC[0, 1], f' \in H\},$$

$$T^*f = if', \quad \forall f \in \mathcal{D}(T^*).$$

若 $T^*f = \pm if$, 即 $if' = \pm if$. 则 $f = e^{\pm ix}$. 所以 $d_+ = d_- = 1$. T 存在自伴延拓. 下面给出 T 的自伴延拓的具体形式.

方法一. $K_+ = \text{span}\{e^x\}$, $K_- = \text{span}\{e^{-x}\}$, 取 K_+ 与 K_- 的标准正交基 $\varphi_+ = \sqrt{\frac{2}{e^2-1}}e^x$, $\varphi_- = \sqrt{\frac{2}{e^2-1}}e^{1-x}$, 则 $\|\varphi_{\pm}\| = 1$. K_+ 与 K_- 的酉算子 U 满足 $U\varphi_+ \rightarrow r\varphi_-, |r| = 1$. 于是 T 的自伴延拓为

$$T_r : \mathcal{D}(T_r) = \{\varphi + \alpha\varphi_+ + \alpha r\varphi_- | \varphi \in \mathcal{D}(T), \alpha \in \mathbf{C}\},$$

$$T_rf = if', \quad \forall f \in \mathcal{D}(T_r).$$

下面来看 $f \in \mathcal{D}(T_r)$ 满足怎样的边界条件?

$$f(0) = \alpha\sqrt{\frac{2}{e^2-1}} + \alpha re\sqrt{\frac{2}{e^2-1}},$$

$$f(1) = \alpha e\sqrt{\frac{2}{e^2-1}} + \alpha r\sqrt{\frac{2}{e^2-1}},$$

所以 $f(1) = \frac{e+r}{1+re}f(0)$, 而 $\left|\frac{e+r}{1+re}\right| = 1$, 与例 2 所述一致.

反之, 若 $f \in \mathcal{D}(T^*)$, $f(1) = \frac{e+r}{1+re}f(0)$, 则由 von Neumann 分解公式,

$$f = \varphi + \alpha\varphi_+ + \beta\varphi_-.$$

$$\frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e^2-1}}\alpha + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}}\beta = \frac{e+r}{1+re} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}}\alpha + \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e^2-1}}\beta \right),$$

$$e\alpha + \beta = \frac{e+r}{1+re}(\alpha + e\beta) \Rightarrow \beta = r\alpha,$$

$$f = \varphi + \alpha\varphi_+ + r\alpha\varphi_- = \varphi + \alpha\varphi_+ + \alpha U\varphi_+,$$

$$\mathcal{D}(T_r) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T^*) \mid f(1) = \frac{e+r}{1+re}f(0) \right\},$$

任何模为 1 的 α 都可以表示为 $\alpha = \frac{e+r}{1+er}$, 取 $r = \frac{\alpha-e}{1-\alpha e}$ 即可 (因为 $|\alpha| = 1, 1 \neq \alpha e$). 这样 T 的自伴延拓便与单位圆周点的个数一样多.

方法二. 对任意 $f, g \in \mathcal{D}(T^*)$,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= (T^*f, g) - (f, T^*g) \\ &= (if', g) - (f, ig') \\ &= if\bar{g}|_0^1 \\ &= i(f(1)\overline{g(1)} - f(0)\overline{g(0)}), \end{aligned}$$

取 $\varphi = \alpha\varphi_+ + \beta\varphi_-$, 满足

$$0 = \langle \varphi, \varphi \rangle = 2i(\|\alpha\varphi_+\|^2 - \|\beta\varphi_-\|^2) = 2i(|\alpha|^2 - |\beta|^2),$$

则 $\beta = \alpha e^{i\theta}, \theta \in \mathbf{R}$, 当 $\alpha \neq 0$ 时, $\varphi = \alpha(\varphi_+ + e^{i\theta}\varphi_-)$ 是模 $\mathcal{D}(T)$ 线性无关的. 令

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(T^*) \mid \langle f, \varphi \rangle = 0\},$$

则 $T^*|_{\mathcal{D}}$ 是 T 的自伴延拓.

事实上, 由 $\langle f, \varphi \rangle = 0$, 得 $f(1)\overline{\varphi(1)} = f(0)\overline{\varphi(0)}$, 即 $f(1) = \frac{\overline{\varphi(0)}}{\overline{\varphi(1)}}f(0)$, 其中,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(0)}{\varphi(1)} \right| &= \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}} + e^{i\theta} \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e^2-1}}}{\frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e^2-1}} + e^{i\theta} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}}} \right| \\ &= \sqrt{\frac{1+e^2+ie\cos\theta}{1+e^2+ie\cos\theta}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(T^*) \mid f(1) = rf(0)\}, \quad |r| = 1.$$

也可以利用定理 3 去找自伴延拓 Calkin 描述中的那些 x_1, \dots, x_d , 取 $h_1(x) = x, h_2(x) = 1 - x$, 则 $h_1, h_2 \in \mathcal{D}(T)$, 但

$$\begin{aligned}\langle h_1, h_1 \rangle &= i(h_1(1)\overline{h_1(1)} - h_1(0)\overline{h_1(0)}) = i, \\ \langle h_1, h_2 \rangle &= i(h_1(1)\overline{h_2(1)} - h_1(0)\overline{h_2(0)}) = 0, \\ \langle h_2, h_2 \rangle &= -i, \\ \det(\langle h_i, h_j \rangle) &= \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} = 1,\end{aligned}$$

所以 h_1, h_2 模 $\mathcal{D}(T)$ 线性无关, 取 $\varphi = \alpha h_1 + \beta h_2, \alpha, \beta$ 不全为零. 由 $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$, 得 $|\varphi(1)|^2 = |\varphi(0)|^2$, 即 $|\alpha| = |\beta|$, T 的自伴延拓定义域为

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(T^*) | \langle f, \varphi \rangle = 0\},$$

$\langle f, \varphi \rangle = 0$, 即 $f(1)\overline{\varphi(1)} = f(0)\overline{\varphi(0)}$, 即 $\overline{\alpha}f(1) = \overline{\beta}f(0)$, 记 $\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} = e^{i\theta}, \theta \in \mathbf{R}$, 则 $\langle f, \varphi \rangle = 0$, 即 $f(1) = e^{i\theta}f(0)$, 从而

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(T^*) | f(1) = e^{i\theta}f(0)\}.$$

例 4 设 $H = L^2[0, \infty)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(T) &= C_0^\infty(0, \infty), \\ Tf &= -f'', \quad f \in \mathcal{D}(T).\end{aligned}$$

则

(1) T 对称.

对任意 $f, g \in \mathcal{D}(T)$,

$$(Tf, g) = \int_0^\infty -f''\overline{g}dx = \int_0^\infty f'\overline{g'}dx = \int_0^\infty f\overline{(-g'')}dx = (f, Tg).$$

(2) T 有相等的亏指数.

解微分方程 $-y'' = iy$ 得

$$y_1 = e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}}x} \notin L^2(0, \infty),$$

$$y_2 = e^{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}x} \in L^2[0, \infty),$$

所以 $d_+ = \dim \ker(T^* - iI) = 1$. 同理, 解方程 $-y'' = -iy$ 得

$$y_1 = e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}}x} \notin L^2[0, \infty), \quad y_2 = e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}}x} \in L^2[0, \infty),$$

所以

$$d_- = \dim \ker(T^* + iI) = 1.$$

(3) T 的自伴延拓 T_1 .

因为

$$\int_0^\infty |e^{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}x}|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

令

$$\varphi_+ = \sqrt[4]{2}e^{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}x}, \quad \varphi_- = \sqrt[4]{2}e^{\frac{-1-i}{\sqrt{2}}x}, \quad K_\pm = \text{span}\{\varphi_\pm\},$$

作 $K_+ \rightarrow K_-$ 的西算子 U :

$$U\varphi_+ = r\varphi_-, \quad |r| = 1,$$

则

$$\mathcal{D}(T_1) = \{\varphi + \beta\varphi_+ + r\beta\varphi_- | \varphi \in \mathcal{D}(\overline{T}), \beta \in \mathbf{C}\},$$

$$T_1 f = -f'', \quad f \in \mathcal{D}(T_1),$$

$$f(0) = \beta\varphi_+(0) + r\beta\varphi_-(0) = \sqrt[4]{2}\beta(1+r).$$

令 $\alpha = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \bar{\alpha} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, 则

$$f'(x) = \varphi'(x) + \sqrt[4]{2}\beta\alpha e^{\alpha x} + \sqrt[4]{2}r\beta\bar{\alpha}e^{\bar{\alpha}x},$$

$$f'(0) = \sqrt[4]{2}\beta\alpha + \sqrt[4]{2}r\beta\bar{\alpha} = \sqrt[4]{2}\beta(\alpha + r\bar{\alpha}),$$

如果 $r \neq -1$, 则

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{\alpha + r\bar{\alpha}}{1+r},$$

$$\frac{\overline{\alpha + r\bar{\alpha}}}{1+r} = \frac{\bar{\alpha} + \bar{r}\alpha}{1+\bar{r}} = \frac{\bar{\alpha}r + \alpha}{r+1} = \frac{\alpha + r\bar{\alpha}}{1+r},$$

所以

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = -a \in \mathbf{R}.$$

刻画自伴域的边条件是 $f'(0) + af(0) = 0$. 由 $\frac{\alpha + r\bar{\alpha}}{1+r} = -a$ 解得 $r = \frac{a-r}{a+\bar{\alpha}}$.

当 $r = -1$ 时, 边条件变成 $f(0) = 0$.

以上是按 von Neumann 描述的处理, 至于按 Calkin 描述的处理见本书例 3.6.1.

参考文献

- [1] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 科学出版社, 1965.
- [2] 曹之江, 刘景麟. 奇异对称微分算子的亏指数理论. 数学进展, 1983, 12(3): 161~178.
- [3] 刘景麟. 关于一类非自伴常微分算子的极限点情形与算子半群理论. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1982, 13(4): 361~372.
- [4] 刘景麟. 关于常微分算式亏指数与边值问题适定性之间的某些联系. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1983, 14(4): 371~381.
- [5] 刘景麟, 袁小平. 极限圆情形 Sturm-Liouville 自伴微分算子谱分解的一个初等证明. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1987, 18(4): 635~641.
- [6] 刘景麟. 对称算子自伴延拓的 Calkin 描述. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1988, 19(4): 573~587.
- [7] 尚在久, 朱瑞英. $(-\infty, \infty)$ 上对称微分算子的自伴域. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1986, 17(1): 17~28.
- [8] Cao Z. On selfadjoint domains of 2-nd order differential expressions in limit-circle case. Acta Math Sinica, 1985, 1(3): 225~230.
- [9] Coddington E A, Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, 1955.
- [10] Dunford N, Schwartz J T. Linear Operators. Part II. John Wiley and Sons, 1963.
- [11] Eastham M S P, Thompson M L. On the limit-point, limit-circle classification of second-order ordinary differential equations. Quart J Math Oxford, 1973, 24: 531~535.
- [12] Everitt W N. Some positive definite differential operators. J London Math Soc, 1968, 43: 465~473.
- [13] Everitt W N. On the deficiency index problem for ordinary differential operators 1910~1976. Differential Equations: Proceedings from the Uppsala 1977 International Conference on Differential Equations, 62~81.
- [14] Goldberg S. Unbounded linear operators: theory and applications, McGraw-Hill, 1966.
- [15] Hille E. Lectures on ordinary differential equations. Addison-Wesley, 1969.
- [16] Kauffman R M. On the limit-n classification of ordinary differential operators with positive coefficients. Proc London Math Soc, 1977, 35: 496~526.
- [17] Kauffman R M, Read T T, Zettl A. The deficiency index problem for powers of ordinary differential expressions. Lecture Notes in Math. No.621, Springer-Verlag, 1977.
- [18] Levitan B M, Sargsjan I S. Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators. AMS, 1975.
- [19] Naimark M A. Linear differential operators. in Russian, 1954.
- [20] Read T T. A limit-point criterion for expressions with intermittently positive coefficients. J London Math Soc 1977, 15: 271~276.

-
- [21] Read T T. Second-order differential equations with small solution. *J Math Anal Appl*, 1980, 77: 165~174.
 - [22] Sun J. On the self-adjoint extensions of singular symmetric differential operators with middle deficiency indices. *Acta Math Sinica*, 1986, 2(2): 152~167.
 - [23] Titchmarsh E C. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Part I Oxford, 1962.
 - [24] Yosida K. Lectures on Differential and Integral Equation. New York: John Wiley and Sons. 1960.

[General Information]

□ □ ⇒ □ □ □ □ □ □

□ □ ⇒ □ □ □

□ □ ⇒ 387

SS□ ⇒ 12148499

DX□ =

□ □ □ □ ⇒ 2009. 1

□ □ □ ⇒ □ □ □ □

